

Calcolo delle probabilita'

A. Introduzione

Il *calcolo della probabilita'* e' ormai una delle branche piu' importanti della matematica, soprattutto per le sue molteplici applicazioni che vanno dalla fisica quantistica, alla termodinamica, alle assicurazioni eccetera...

Qui ne vedremo un breve sunto a livello di programma per un liceo scientifico. Svilupperemo prima il calcolo combinatorio per poter parlare di casi possibili, passeremo poi a studiare il concetto di probabilita' con le relative proprieta' e quindi ne vedremo un'applicazione nella teoria dei giochi; infine vedremo alcune interessanti distribuzioni di probabilita' che ci permetteranno di risolvere dei problemi che sembrano impossibili.

B. Calcolo combinatorio

Il *calcolo combinatorio* si occupa di come possiamo combinare fra loro piu' oggetti; magari e' un poco noioso, ma ci permettera' di considerare i vari casi possibili che si possono presentare nel disporre degli oggetti.

E' essenziale per poter sviluppare poi il calcolo delle probabilita'.

Svilupperemo poi dei metodi compatti per rappresentare delle formule piuttosto estese:

- [Permutazioni](#)
- [Disposizioni](#)
- [Combinazioni](#)
- [Coefficienti binomiali](#)

1. Permutazioni

Se hai un insieme di oggetti, ad esempio delle figurine, in quanti modi puoi metterle una di seguito all'altra?

Se hai dei libri in quanti modi puoi ordinarli su uno scaffale? Oppure in quanti modi puoi metterti a studiare le tre materie dove pensi che domani sarai interrogato?

Parliamo quindi di *permutazioni*:

- [Permutazioni semplici](#)
- [Fattoriale di un numero](#)
- [Permutazioni con ripetizione](#)

a) Permutazioni semplici

Procediamo su un esempio:

Domani sei a rischio di essere interrogato in tre materie: italiano, matematica e inglese: essendo la fine del quadrimestre ed avendo tre ore di tempo decidi di studiare ogni materia per 1 ora; in quanti modi puoi "permutare" le materie? In pratica puoi fare:

<u>Prima ora</u>	<u>Seconda ora</u>	<u>Terza ora</u>
Italiano	Inglese	Matematica
Italiano	Matematica	Inglese
Inglese	Italiano	Matematica
Matematica	Italiano	Inglese
Inglese	Matematica	Italiano
Matematica	Inglese	Italiano

Come vedi hai 6 possibilità.

Noi vogliamo trovare il numero di permutazioni possibili senza dover fare tutta una tabella, anche perché finché si tratta di 3 oggetti è abbastanza semplice, ma se volessi sapere in quanti modi diversi posso permutare i 90 numeri della tombola mi troverei nei pasticci.

Proviamo a risolvere questo problema senza fare la tabella:

Quanti numeri diversi di 5 cifre posso formare con le cifre 1,2,3,4,5 ?

Allora nel numero che potrò fare, la cifra 1 potrà essere al primo posto, oppure al secondo posto, oppure al terzo posto, oppure al quarto posto, oppure al quinto posto; cioè per la cifra 1 ho 5 possibilità.

Per la cifra 2 (avendo già messo la cifra 1) invece ho solo 4 possibilità perché un posto è già occupato dalla cifra 1.

Per la cifra 3 mi restano tre possibilità perché due posti sono già occupati dalla cifra 1 e dalla cifra 2.

Per la cifra 4 mi restano due possibilità perché tre posti sono già occupati dalla cifra 1, dalla cifra 2 e dalla cifra 3.

Per la cifra 5 ho solo una possibilità perché quattro posti sono già occupati dalle cifre 1, 2, 3 e 4 e il 5 va nel posto che resta vuoto.

Quindi:

- per la cifra 1 → 5 possibilità
- per la cifra 2 → 4 possibilità
- per la cifra 3 → 3 possibilità
- per la cifra 4 → 2 possibilità
- per la cifra 5 → 1 possibilità

cioè:

$$\text{Possibilità} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Con le 5 cifre posso scrivere 120 numeri diversi.

Riprendiamo l'esercizio delle materie da studiare visto prima.

Comincio da italiano:

Italiano posso studiarlo la prima ora, oppure la seconda ora oppure la terza.

Inglese posso studiarlo in una delle due ore in cui non studio italiano.

Matematica posso studiarla nell'ora in cui non studio né italiano né inglese.

Quindi:

- Italiano → 3 possibilità
- Inglese → 2 possibilità
- Matematica → 1 possibilità

$$\text{Possibilità} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

In generale:

Il numero di permutazioni semplici su n oggetti P_n è dato dal prodotto del numero n per tutti i suoi antecedenti

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Per *antecedenti* di un numero si intendono i numeri che lo precedono nella successione naturale:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,.....

ad esempio gli antecedenti di 6 sono i numeri 1,2,3,4,5

Problema:

Quanti anagrammi (anche senza significato) posso fare con le lettere della parola cane?

Sono 4 oggetti quindi:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Con le 4 lettere posso scrivere 24 gruppi diversi.

Adesso posso risolvere anche il problema:

Trovare in quanti modi diversi possono uscire i 90 numeri della tombola

Basta applicare la formula:

$$P_{90} = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A parte il fatto che non calcolo il risultato perche' e' un numero troppo elevato, devo trovare un modo di scriverlo in maniera piu' compatta perche' non posso scrivere centinaia di numeri in fila oppure mettere i puntini per indicare il numero di permutazioni; introduciamo quindi, nella prossima pagina, il *fattoriale di un numero*.

b) Fattoriale di un numero

Abbiamo bisogno di scrivere in modo piu' compatto un insieme di prodotti del tipo:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

od anche per un numero naturale generico **n**:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Useremo la notazione:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Quindi nella formula per calcolare le permutazioni semplici su **n** oggetti potremo scrivere:

$$P_n = n!$$

Il fattoriale di un numero naturale indica il prodotto del numero per tutti i suoi antecedenti

Per convenzione si pone: $0! = 1$

Come ti ho gia' detto per antecedenti di un numero naturale si intendono i numeri che lo precedono nella successione naturale:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ∞

Ad esempio, gli antecedenti di 7 sono i numeri 1,2,3,4,5,6 .

Il fattoriale di un numero e' definito solo per i **numeri naturali**.

Il valore del fattoriale al crescere di **n** cresce molto rapidamente (nozione non precisa ma che rende l'idea).

Ad esempio:

$$6! = 720$$

$$10! = 3628800$$

$$20! = 2432902008176640000$$

.....

c) Permutazioni con ripetizione (o permutazioni con oggetti identici)

Vediamo cosa succede quando alcuni degli oggetti, su cui dobbiamo fare le permutazioni, sono uguali; come esempio, prendiamo il problema:

Quanti anagrammi (anche senza significato) posso fare con le lettere della parola cannone?

Sono 7 oggetti ma tre fra questi sono uguali; quindi, prese tutte le possibili permutazioni su 7 oggetti, dovro' togliere quelle dove le lettere **n** non sono distinguibili (come fai a dire se

ad esempio la **n** che compare al primo posto e' la prima o la seconda o la terza?); quindi per 7 oggetti avrei:

$$P_7 = 7!$$

Mentre per i tre oggetti uguali (le n) avrei:

$$P_3 = 3!$$

Quindi i possibili anagrammi saranno:

$$P_{7;3} = \frac{P_7}{P_3} = \frac{7!}{3!} = 840$$

Approfondimento (*Scheda n. B1*)

Scheda n. B1: Permutazioni con oggetti ripetuti:

Facciamo un esempio con 4 oggetti di cui 3 uguali: **a b b b**

Se fossero oggetti diversi, le permutazioni sarebbero $P_4 = 4! = 24$ e precisamente (per fartelo vedere bene coloro diversamente le lettere b):

a **b b b b** a **b b b b** a **b b b b** a
a **b b b b** a **b b b b** a **b b b b** a
a **b b b b** a **b b b b** a **b b b b** a
a **b b b b** a **b b b b** a **b b b b** a
a **b b b b** a **b b b b** a **b b b b** a
a **b b b b** a **b b b b** a **b b b b** a

Osserva che in ogni colonna ci sono le 6 permutazioni per i tre colori della lettera b ($P_3 = 3! = 6$)

Nella prima colonna la **a** e' al primo posto e permutiamo le tre **b**

Nella seconda colonna la **a** e' al secondo posto e permutiamo le tre **b**

Nella terza colonna la **a** e' al terzo posto e permutiamo le tre **b**

Nella quarta colonna la **a** e' al quarto posto e permutiamo le tre **b**

Ma se non ho i colori, le lettere **b** sono indistinguibili tra loro e pertanto ogni colonna diventa un termine singolo: **a b b b b a b b b b a b b b b a**.

Allora per avere le permutazioni su 4 oggetti di cui 3 identici dovrò fare le permutazioni su 4 oggetti e dividerle per le permutazioni su tre oggetti:

$$P_{4;3} = \frac{P_4}{P_3} = \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

Per fare i calcoli piu' velocemente osserva che vale:

$$P_{7;3} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

cioe' nelle frazioni con fattoriali posso sempre considerare come nelle'espressione sopra e semplificare l'ultimo fattoriale (useremo spesso questa proprieta').

Per completare vediamo anche il caso in cui gli oggetti identici siano di tipi diversi, come ad esempio l'anagramma della parola "matematica".

Ci sono due **m**, due **t** e tre **a**, quindi:

$$P_{10;2,2,3} = \frac{10!}{2! 2! 3!} = 151200$$

Notare nella P il ; dopo il numero globale degli oggetti e la , fra i numeri di oggetti uguali

Quindi la formula generale per le permutazioni su n oggetti di cui k_1, k_2, \dots, k_h uguali sara':

$$P_{n;k_1, k_2, \dots, k_h} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_h!}$$

2. Disposizioni

Le disposizioni su n oggetti sono tutte le coppie, terne, quaterne, k -uple **ordinate** che puoi formare con quegli oggetti.

Ordinate vuole dire che ad esempio la coppia (1,2) e' diversa dalla coppia (2,1)

In pratica puoi dire che usi le disposizioni quando **conta l'ordine** in cui consideri gli oggetti

Distinguiamo fra:

- Disposizioni semplici
- Disposizioni con ripetizione

a) Disposizioni semplici

Le disposizioni semplici su n oggetti sono i numeri delle coppie ordinate $D_{n;2}$, terne ordinate $D_{n;3}$, quaterne ordinate $D_{n;4}, \dots, k$ -uple ordinate $D_{n;k}$ che posso formare con n oggetti.

Per trovare la formula procediamo con ordine, ad esempio su 5 oggetti:

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Se considero gli elementi uno ad uno, allora ho 5 possibilita':

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$

$$D_{5;1} = 5$$

Se considero le coppie ordinate, allora ad ogni elemento precedente ne devo aggiungere 4 (uno alla volta):

$a_1 a_2 a_1 a_3 a_1 a_4 a_1 a_5$

$a_2 a_1 a_2 a_3 a_2 a_4 a_2 a_5$

$a_3 a_1 a_3 a_2 a_3 a_4 a_3 a_5$

$a_4 a_1 a_4 a_2 a_4 a_3 a_4 a_5$

$a_5 a_1 a_5 a_2 a_5 a_3 a_5 a_4$

cioe':

$$D_{5;2} = 5 \cdot 4$$

Se poi voglio le terne ordinate, ogni coppia mi generera' tre possibili terne (mi restano tre numeri perche' due sono gia' nella coppia):

$$D_{5;3} = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Cosi' se voglio le quaterne ordinate ad ogni terna, potro' aggiungere 2 oggetti diversi perche' 3 sono gia' nelle terne:

$$D_{5;4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

Concludendo, se voglio le cinque ordinate ad ogni quaterna, potro' aggiungere solo 1 oggetto perche' 4 sono gia' nelle quaterne:

$$D_{5;5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Da notare che le disposizioni semplici di 5 oggetti presi 5 a 5 corrispondono alle permutazioni su 5 oggetti:

$$D_{5;5} = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Le permutazioni sono le disposizioni che posso fare considerando di prendere tutti gli oggetti.

Facciamo ora un riepilogo cercando la formula:

$$D_{5,1} = 5$$

$$D_{5,2} = 5 \cdot 4$$

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$D_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$D_{5,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Il primo numero della **D** corrisponde al primo numero del prodotto dopo l'uguale; dobbiamo trovare la corrispondenza fra il secondo numero prima dell'uguale ed un numero dopo l'uguale.

Osserviamo che:

$$5 - 1 + 1 = 5$$

$$5 - 2 + 1 = 4$$

$$5 - 3 + 1 = 3$$

$$5 - 4 + 1 = 2$$

$$5 - 5 + 1 = 1$$

Quindi per ottenere l'ultimo numero del prodotto dopo l'uguale basta fare la differenza dei due numeri prima dell'uguale ed aumentarla di 1.

Questo ci porta alla formula:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Cioè:

Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti presi k a k e' uguale al prodotto di tutti i numeri naturali compresi fra n ed $(n-k+1)$

Chiamiamo "**terna ordinata**" un insieme di 3 numeri in cui conta l'ordine, cioè 60,30,90 e' una terna diverso da 90,60,30.

Per esercizio troviamo tutte le terne ordinate che possono uscire in un'estrazione su una ruota del lotto; sono le terne che possiamo formare con 90 oggetti, cioè le disposizioni semplici di 90 oggetti presi tre a tre:

$$D_{90,3} = 90 \cdot 89 \cdot \dots \cdot (90-3+1) = 90 \cdot 89 \cdot 88 = 704880$$

Prova ora a calcolare il numero delle cinque ordinate che possono uscire in una estrazione del lotto.

b) Disposizioni con ripetizione

Le disposizioni con ripetizione su n oggetti sono i numeri delle coppie ordinate $D'_{n,2}$, terne ordinate $D'_{n,3}$, quaterne ordinate $D'_{n,4}, \dots$, k -uple ordinate $D_{n,k}$ che posso formare con n oggetti, considerando che tali oggetti possono anche essere ripetuti.

Equivale al problema di estrarre un numero da un sacchetto e, prima di procedere alla seconda estrazione, rimettere il numero nel sacchetto in modo da poterlo riestrarre.

Ad esempio, le disposizioni con ripetizione di classe 2 su 3 oggetti, cioè le coppie che posso formare con i 3 oggetti:

1 2 3

Saranno:

1 1 1 2 1 3

2 1 2 2 2 3

3 1 3 2 3 3

Nel nostro caso quindi:

$$D'_{3;2} = 9$$

Vediamo di trovare la formula per le disposizioni con ripetizione di classe 3 (terne ordinate) su 5 oggetti $D'_{5;3}$. Per il primo posto nella terna ho 5 possibilità: uno qualunque dei 5 numeri può essere al primo posto; anche per il secondo posto nella terna ho 5 possibilità; uno qualunque dei 5 numeri può essere al secondo posto ed anche per il terzo posto nella terna ho 5 possibilità; uno qualunque dei 5 numeri può essere al terzo posto. Quindi raccogliendo:

$$D'_{5;3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$

In generale: le disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k saranno:

$$D'_{n;k} = n^k$$

Come esercizio, calcoliamo il numero di colonne che dovrei giocare per essere sicuro di vincere nella schedina del totocalcio.

Nota che nelle disposizioni con ripetizione le k -uple possono essere anche di dimensione maggiore di n , cioè con 3 oggetti posso fare anche cinquine, sestine,....; basta poter riestrarre l'oggetto.

Sono disposizioni con ripetizione di 3 oggetti (1,x,2) presi 13 a 13:

$$D'_{3;13} = 3^{13} = 1594323$$

Quindi, se vuoi giocare tutte le colonne possibili, devi giocare 1594323 colonne.

3. Combinazioni

Le combinazioni su n oggetti sono tutte le coppie, terne, quaterne,... k -uple **non ordinate** che puoi formare con quegli oggetti.

Non ordinate vuole dire che ad esempio la coppia (1,2) e la coppia (2,1) sono la stessa coppia.

In pratica puoi dire che usi le combinazioni quando **non conta l'ordine** in cui consideri gli oggetti. Distinguiamo fra:

- [Combinazioni semplici](#)
- [Combinazioni con ripetizione](#)

a) Combinazioni semplici

Partiamo da un esempio pratico: troviamo tutte le terne **non ordinate** che posso formare con i 4 oggetti (disposizioni semplici di 4 oggetti presi 3 a 3):

a b c d

Prima troviamo le disposizioni semplici (cioè le terne ordinate) poi togliamo l'ordine:

a b c	a b d	a c d	b c d
a c b	a d b	a d c	b d c
b a c	b a d	c a d	c b d
c a b	d a b	d a c	d b c
b c a	b d a	c d a	c d b
c b a	d b a	d c a	d c b

Come fare le tabelle rapidamente (*Scheda n. B2*)

Scheda n. B2: Come fare le tabelle rapidamente

Per fare le tabelle in modo veloce ad esempio nella tabella precedente prendo tre gruppi di lettere (su 4), cioè considero in ordine alfabetico 3 della 4 lettere possibili:

abc abd acd e bcd

Poi, nel primo gruppo, comincio dalla lettera **a**

e quindi ottengo **abc** ed **acb**

poi metto la **a** al centro

bac cab

poi metto la **a** in fondo

bca cba

Anche nel secondo gruppo **abd** comincio dalla lettera **a**

e quindi ottengo **abd** ed **adb**

poi metto la **a** al centro

bad dab

poi metto la **a** in fondo

bda dba

e così via di seguito per gli altri gruppi.

Ogni colonna contiene la stessa terna ordinata in modo diverso; quindi, se considero le combinazioni, ogni colonna mi corrisponde ad una sola terna, cioè':

$$C_{4;3} = 4$$

e precisamente le 4 combinazioni sono:

abc abd acd bcd

In pratica per trovare le combinazioni (che sono non ordinate) devo prendere le disposizioni (che sono ordinate) e dividerle per le permutazioni (che danno l'ordine), cioè':

$$C_{4;3} = \frac{D_{4;3}}{P_3} = \frac{4 \cdot \dots \cdot (4 - 3 + 1)}{3!}$$

Generalizziamo e ricaviamo la formula generale:

$$C_{n;k} = \frac{D_{n;k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k!}$$

Come formula è un po' scomoda, cerchiamo di scriverla in modo diverso (legge dei tre fattoriali):

$$\frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k!} =$$

Moltiplico sopra e sotto per $(n-k)!$:

$$\frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k)!}{k! (n - k)!} =$$

ma il prodotto:

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k)!$$

corrisponde ad $n!$ cioè' il prodotto di n per tutti i suoi antecedenti, infatti $(n-k)!$ è il prodotto di tutti gli antecedenti di $(n-k+1)$; quindi ottengo:

$$\frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Inoltre siccome dovremo usare spesso questa espressione, la indicheremo in breve con il simbolo:

$$\binom{n}{k}$$

Termine che sarà chiamato **coefficiente binomiale**

Quindi fai attenzione perché potrai trovare tre notazioni diverse:

$$C_{n;k} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{k! (n - k)!} = \binom{n}{k}$$

Nel gioco del lotto un terno si dice semplice se non conta l'ordine di uscita; troviamo quanti sono i possibili terni semplici che possiamo ottenere estraendo 3 numeri.

Sono le combinazioni di 90 oggetti presi 3 a 3 (di classe 3):

$$C_{90;3} = \frac{90!}{3!(90-3)!} = \frac{90!}{3!87!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 117480$$

Nota che ho usato la seconda formula e che ho semplificato 90! con 87! perche':

$$90! = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$87! = 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Quindi posso semplificare da 87 in giu'.

b) Combinazioni con ripetizione

Le combinazioni con ripetizione C_n^* ; di n oggetti sono le coppie, terne, quaterne,..... k-uple non ordinate che posso formare considerando che ogni oggetto puo' essere considerato piu' volte.

Come esempio, vediamo quali sono le combinazioni con ripetizione di classe 3 (terne) sui 4 oggetti:

a b c d

Devo fare tutte le terne non ordinate possibili anche ripetendo gli oggetti; sono:

Nella prima riga ho messo le combinazioni semplici

Nella prima colonna ho aggiunto quelle con due a e con tre a

Nella seconda colonna ho aggiunto quelle con due b e con tre b

Nella terza colonna ho aggiunto quelle con due c e con tre c

Nella quarta colonna ho aggiunto quelle con due d e con tre d

a b c a b d a c d b c d

a a a b b a c c a d d a

a a b b b b c c b d d b

a a c b b c c c c d d c

a a d b b c c c d d d d

Quindi:

$$C_{4;3}^* = 20$$

Visto che le combinazioni con ripetizione vengono usate raramente per ora mi limito a fornire la formula, rimandando la dimostrazione ad una seconda stesura:

$$C_{n;k} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!}$$

4. Coefficienti binomiali

Vediamo ora, data la loro importanza, di studiare meglio i coefficienti binomiali, il loro collegamento allo sviluppo del quadrato di un binomio ed anche alcune formule notevoli:

- [Relazioni fra coefficienti binomiali e potenza di un binomio](#)
- [Il triangolo di Tartaglia](#)
- [Formula di Newton](#)
- [Legge delle classi complementari](#)
- [Relazione di Stiefel](#)
- [Relazione di ricorrenza](#)

a) Relazioni fra coefficienti binomiali e potenza di un binomio

Cerchiamo di capire il significato dei coefficienti binomiali; ad esempio iniziamo a vedere quelli per le combinazioni di due oggetti:

$$\binom{2}{1} = 2 \binom{2}{2} = 1$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo:

$$\binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

Ricordando la relazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 0} = 1$$

Ricordati che $0! = 1$

Vediamo anche quelli per le combinazioni per 3 oggetti:

$$\binom{3}{1} = 3 \binom{3}{2} = 3 \binom{3}{3} = 1$$

Ecco i calcoli:

Calcoliamo:

$$\binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Ricordando la relazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0} = 1$$

Ricordati che $0! = 1$

Se osservi questi numeri hanno qualcosa di familiare, e precisamente, a meno del primo termine, sono i coefficienti dello sviluppo del **quadrato di un binomio** e del **cubo di un binomio**.

Proviamo allora ad aggiungere al primo posto le combinazioni di di 2 e 3 oggetti di classe zero:

$$\binom{2}{0} = 1 \binom{2}{1} = 2 \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \binom{3}{1} = 3 \binom{3}{2} = 3 \binom{3}{3} = 1$$

Adesso vedi che le combinazioni corrispondono ai coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio.

Ad esempio per le combinazioni su 4 oggetti avremo:

$$\binom{4}{0} = 1 \binom{4}{1} = 4 \binom{4}{2} = 6 \binom{4}{3} = 4 \binom{4}{4} = 1$$

Infatti la potenza quarta del binomio e':

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Dai un'occhiata (*Scheda n. B3*) all'applicazione delle combinazioni semplici per determinare l'insieme delle parti e guarda questo **triangolo di Tartaglia**.

Da qui il nome di coefficiente binomiale per la scrittura: $\binom{n}{k}$

Esempio:

Calcolare $(a+b)^5$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0} a^5 \cdot b^0 + \binom{5}{1} a^4 \cdot b^1 + \binom{5}{2} a^3 \cdot b^2 + \binom{5}{3} a^2 \cdot b^3 + \binom{5}{4} a^1 \cdot b^4 + \binom{5}{5} a^0 \cdot b^5 =$$

$$= a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

Scheda n. B3: Approfondimento sul numero degli elementi della potenza di un insieme (e sua relazione con il triangolo di Tartaglia)

Non solo gli elementi della potenza di un insieme sono pari a 2^n ma corrispondono anche alla riga del triangolo di Tartaglia corrispondente al numero degli elementi.

Infatti, consideriamo ad esempio la riga del [triangolo di Tartaglia](#) della potenza 4, essa vale:

1 4 6 4 1

Allora l'insieme potenza di un insieme con 4 elementi e' composto dai seguenti elementi:

- 1 insieme con 0 elementi (insieme vuoto)
- 4 insiemi con 1 elemento
- 6 insiemi con 2 elementi
- 4 insiemi con 3 elementi
- 1 insieme con 4 elementi (l'insieme improprio)

e la somma di tutti quanti vale:

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

Come corollario ne deriva che [la somma degli elementi di ogni riga](#) del triangolo di Tartaglia e' una potenza del 2

Vediamone l'esempio su un insieme di 4 oggetti:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

Allora:

$$P(A) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 4 \},$$

$$\{ 1, 2 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 1, 4 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 2, 4 \}, \{ 3, 4 \},$$

$$\{ 1, 2, 3 \}, \{ 1, 2, 4 \}, \{ 1, 3, 4 \}, \{ 2, 3, 4 \}, \{ 1, 2, 3, 4 \} \}$$

Cerchiamo di capire il perche': siccome negli insiemi non conta l'ordine, cioe' $\{a,b\}=\{b,a\}$ allora per trovare il numero di insiemi che posso formare con un insieme ad esempio di 4 elementi devo considerare le [combinazioni](#) semplici di quattro elementi e precisamente:

Combinazioni di classe 0	$\binom{4}{0} = 1$	\emptyset
Combinazioni di classe 1	$\binom{4}{1} = 1$	$\{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 4 \}$
Combinazioni di classe 2	$\binom{4}{2} = 1$	$\{ 1, 2 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 1, 4 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 2, 4 \}, \{ 3, 4 \}$
Combinazioni di classe 3	$\binom{4}{3} = 1$	$\{ 1, 2, 3 \}, \{ 1, 2, 4 \}, \{ 1, 3, 4 \}, \{ 2, 3, 4 \}$
Combinazioni di classe 4	$\binom{4}{4} = 1$	$\{ 1, 2, 3, 4 \}$

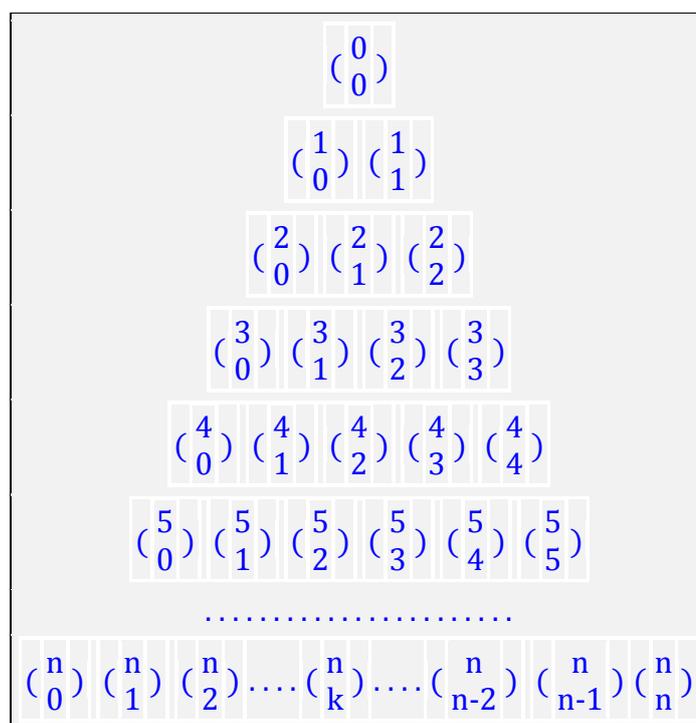
Ma [abbiamo visto](#) nel calcolo combinatorio che le combinazioni su n oggetti non sono altro che i coefficienti dello sviluppo del binomio, cioe' i termini della riga corrispondente del [triangolo di Tartaglia](#), quindi abbiamo una stretta corrispondenza fra righe del triangolo di Tartaglia ed elementi dell' insieme potenza di un insieme.

b) Il triangolo di Tartaglia

Ora possiamo scrivere il triangolo di Tartaglia:

Potenza binomio	Triangolo di Tartaglia	Somma termini e potenza del 2
$(a+b)^0$	1	$1 = 2^0$
$(a+b)^1$	1 1	$2 = 2^1$
$(a+b)^2$	1 2 1	$4 = 2^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$8 = 2^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1	$64 = 2^6$
$(a+b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1	$128 = 2^7$
$(a+b)^8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1	$256 = 2^8$
$(a+b)^9$	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	$512 = 2^9$
$(a+b)^{10}$	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	$1024 = 2^{10}$
..... eccetera

Utilizzando i coefficienti binomiali:



c) Formula di Newton

Se ora volessimo calcolare:

$$(a+b)^8 =$$

potremmo sempre calcolarlo in ordine facendo tutte le potenze precedenti, ma pensa che noia se dovessi calcolare ad esempio:

$$(a+b)^{20} =$$

ci vorrebbero ore!

Un grande Matematico, Newton, ha trovato il modo per calcolare la potenza senza calcolare tutte le potenze precedenti: il metodo e' un po' laborioso ma, visto il tempo che ci fa risparmiare, ne vale certo la pena.

Vediamolo assieme, passaggio per passaggio, sei pronto?

Proviamo a calcolare:

$$(a+b)^8 =$$

Prima di tutto osserviamo che il primo termine del risultato sara':

$$1a^8$$

per il secondo termine, consideriamo il primo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del primo termine:

$$1$$

e l'esponente della potenza di **a** nel primo termine:

$$8$$

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato.

Essendo il primo termine devo dividere per **1** il risultato e':

$$(1 \cdot 8) / 1 = 8$$

Allora il secondo termine sara':

$$8a^7b$$

Proseguendo faccio sempre lo stesso.

Per il terzo termine, consideriamo il secondo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del secondo termine:

$$8$$

e l'esponente della potenza di **a** nel secondo termine:

$$7$$

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato.

Essendo il secondo termine, devo dividere per **2**; il risultato e':

$$(8 \cdot 7) / 2 = 28$$

Allora il terzo termine sara':

$$28a^6b^2$$

Per il quarto termine, consideriamo il terzo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del terzo termine:

$$28$$

e l'esponente della potenza di **a** nel terzo termine:

$$6$$

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato.

Essendo il terzo termine, devo dividere per:

$$3$$

Il risultato e':

$$(28 \cdot 6) / 3 = 56$$

Allora il quarto termine sara':

$$56a^5b^3$$

Per il quinto termine, consideriamo il quarto termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del quarto termine:

56

e l'esponente della potenza di **a** nel quarto termine:

5

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato essendo il quarto termine devo dividere per:

4

Il risultato e':

$$(56 \cdot 5) / 4 = 70$$

Allora il quinto termine sara':

$$70a^4b^4$$

Per il sesto termine, consideriamo il quinto termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del quinto termine:

70

e l'esponente della potenza di **a** nel quinto termine:

4

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato.

Essendo il quinto termine devo dividere per:

5

Il risultato e':

$$(70 \cdot 4) / 5 = 56$$

Allora il sesto termine sara':

$$56a^3b^5$$

Per il settimo termine, consideriamo il sesto termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del sesto termine:

56

e l'esponente della potenza di **a** nel sesto termine:

3

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato.

Essendo il sesto termine devo dividere per:

6

Il risultato e':

$$(56 \cdot 3) / 6 = 28$$

Allora il settimo termine sara':

$$28a^2b^6$$

Per l'ottavo termine, consideriamo il settimo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del settimo termine:

28

e l'esponente della potenza di **a** nel settimo termine:

2

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato.

Essendo il settimo termine devo dividere per:

7

Il risultato e':

$$(28 \cdot 2) / 7 = 8$$

Allora l'ottavo termine sara':

$$8a^1b^7$$

Per il nono termine, consideriamo l'ottavo termine e facciamo il prodotto fra il coefficiente del settimo termine:

8

e l'esponente della potenza di **a** nell'ottavo termine:

1

e dividiamo il risultato per il posto che occupa il termine considerato.
Essendo l'ottavo termine devo dividere per:

8

Il risultato e':

$$(8 \cdot 1) / 8 = 1$$

Allora il nono termine sara':

$$1a^0b^8 = b^8$$

e non posso piu' proseguire.

Difficile? forse no, ma complicato si' ed anche molto, consoliamoci pensando che per calcolare:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

avrei dovuto fare:

$$(a+b)^7 =$$

$$(a+b)^6 =$$

$$(a+b)^5 =$$

eccetera eccetera

Avevamo gia' usato la [regola di Newton](#) ma solo come metodo pratico, ora ne vediamo la giustificazione teorica

Vediamo la formula di Newton per lo sviluppo della potenza qualunque del binomio: ricordati che per gli esponenti abbiamo che mentre l' esponente del secondo termine aumenta quello del primo diminuisce:

$$(a+b)^n = \\ = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Possiamo anche scriverlo in forma piu' compatta:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0,1,\dots,n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Cioe' lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio e' uguale alla somma dei termini che si ottengono sostituendo nell'espressione:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

al posto di k successivamente i valori 0,1,2,...,n

Come applicazione vediamo di sviluppare:

$$(a+b)^{10} = \text{Soluzione:}$$

Consideriamo la formula di Newton sostituendo ad n il valore 10:

$$(a+b)^{10} = \sum_{k=0,1,\dots,9,10} \binom{10}{k} a^{10-k} b^k$$

Per calcolare i vari termini devo sostituire a k i valori 0,1,2,3,...,9,10 e, sommando i risultati ottengo lo sviluppo del binomio:

1. Sostituisco 0:

$$\binom{10}{0} a^{10-0} b^0 = a^{10}$$

Calcolo del coefficiente:

Calcoliamo:

$$\binom{10}{0}$$

Applico la relazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{10}{0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} = \frac{10!}{1 \cdot 10!} = 1$$

Ricordati che $0! = 1$

2. Sostituisco 1:

$$\binom{10}{1} a^{10-1} b^1 = 10a^9b$$

Calcolo del coefficiente:

Calcoliamo:

$$\binom{10}{1}$$

Applico la relazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10 \cdot 9!}{1 \cdot 9!} = 10$$

Ricordati che $1! = 1$

3. Sostituisco 2:

$$\binom{10}{2} a^{10-2} b^2 = 45a^8b^2$$

Calcolo del coefficiente:

Calcoliamo:

$$\binom{10}{2}$$

Applico la relazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 1 \cdot 8!} = 45$$

4. Sostituisco 3:

$$\binom{10}{3} a^{10-3} b^3 = 120a^7b^3$$

Calcolo del coefficiente:

Calcoliamo:

$$\binom{10}{3}$$

Applico la relazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

5. Sostituisco 4:

$$\binom{10}{4} a^{10-4} b^4 = 210a^6b^4$$

Calcolo del coefficiente:

Calcoliamo:

$$\binom{10}{4}$$

Applico la relazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

6. Sostituisco 5:

$$\binom{10}{5} a^{10-5} b^5 = 252 a^5 b^5$$

Calcolo del coefficiente:

Calcoliamo:

$$\binom{10}{5}$$

Applico la relazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 252$$

7. Sostituisco 6:

$$\binom{10}{6} a^{10-6} b^6 = 252 a^4 b^6$$

8. Sostituisco 7:

$$\binom{10}{7} a^{10-7} b^7 = 210 a^3 b^7$$

9. Sostituisco 8:

$$\binom{10}{8} a^{10-8} b^8 = 45 a^2 b^8$$

10. Sostituisco 9:

$$\binom{10}{9} a^{10-9} b^9 = 10 a b^9$$

11. Sostituisco 10:

$$\binom{10}{10} a^{10-10} b^{10} = b^{10}$$

Dopo il sesto termine non calcolo piu' il coefficiente binomiale perche' si ripete (il triangolo di Tartaglia e' simmetrico)

Otengo quindi lo sviluppo:

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10 a^9 b + 45 a^8 b^2 + 120 a^7 b^3 + 210 a^6 b^4 + 252 a^5 b^5 + 210 a^4 b^6 + 120 a^3 b^7 + 45 a^2 b^8 + 10 a b^9 + b^{10}$$

d) Legge delle classi complementari

Vediamo ora alcune proprieta' dei coefficienti binomiali; talvolta queste proprieta' vengono date come domanda all'esame di maturita' per il liceo scientifico, forse per vedere se lo studente e' capace di calcoli.

Se frequenti il quinto liceo scientifico ti consiglio di studiare molto bene questa pagina e le due successive. Naturalmente nel compito invece di n puoi trovare $n-1$, $n+1$, $n-2$, $n+2$,... ed invece di k puoi trovare $k-1$, $k+1$, $k-2$, $k+2$,...

Questa si chiama *legge delle classi complementari* perche' il numero sotto e' la classe della combinazione (si dice combinazione di n elementi di classe k) ed e' complementare perche' k ed $n-k$ sono complementari rispetto ad n (cioe' la loro somma vale n).

E' questa legge che ci garantisce che il triangolo di Tartaglia e' simmetrico.

Dobbiamo dimostrare che e' valida l'uguaglianza:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Sviluppo il secondo termine e faccio vedere che e' uguale al primo:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Ma l'ultimo termine e' lo sviluppo di:

$$= \binom{n}{k}$$

Come volevamo.

e) Relazione di Stiefel

Dobbiamo dimostrare che e' valida l'uguaglianza:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Sviluppo il secondo termine e faccio vedere che e' uguale al primo:

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! [(n-1) - (k-1)]!}$$

Ora raccolgo a fattor comune (n-1)!

$$= (n-1)! \cdot \frac{1}{k!(n-k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} =$$

Devo fare il minimo comune multiplo: ricordando che $n! = n(n-1)!$ e $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$ mi conviene scrivere cosi' (in questo modo ho gli stessi termini al denominatore):

$$= (n-1)! \cdot \frac{1}{k(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} =$$

Faccio il minimo comune multiplo $k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!$:

$$= (n-1)! \cdot \frac{(n-k) + k}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}$$

Sopra sommo e sotto ricordo che $k(k-1)! = k!$ e che $(n-k)(n-k-1)! = (n-k)!$

Quindi ottengo:

$$= (n-1)! \cdot \frac{n}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Come volevamo.

e) Relazione di ricorrenza

Dobbiamo dimostrare che e' valida l'uguaglianza:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Sviluppo il secondo termine e faccio vedere che e' uguale al primo:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Per semplificare sopra e sotto ricordo che $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$. Inoltre ricordo che: $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$:

$$= \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} =$$

Semplifico:

$$= \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} =$$

Posso anche scrivere:

$$= \frac{n!}{(k+1)! [n - (k+1)]!} = \binom{n}{k+1}$$

Come volevamo.

C. Probabilità di un evento

Ora possiamo iniziare la teoria della probabilità: grosso modo possiamo distinguere tre teorie diverse: la probabilità classica, la teoria frequentista (o probabilità statistica) e la probabilità soggettiva.

Vedremo di superare i loro limiti considerando poi la definizione assiomatica di probabilità che comprende le altre definizioni come casi particolari.

Per seguire l'argomento è necessario conoscere bene la [teoria degli insiemi](#)

Nel biennio ed in parecchie scuole anche del triennio è sufficiente limitare il calcolo delle probabilità alla probabilità classica con qualche semplice cenno alla frequentista ed alla soggettiva; in tal caso puoi saltare la probabilità assiomatica in altre invece nel triennio è richiesta la probabilità assiomatica considerando le altre probabilità come casi particolari; in questo caso devi fare tutto il capitolo sulle 4 probabilità.

Premettiamo anche alcune nozioni comuni a tutti i tipi di probabilità'.

- [Introduzione; concetto di evento](#)
- [Spazio delle probabilità ed eventi](#)
- [Operazioni sugli eventi](#)
- [Probabilità classica](#)
- [Probabilità statistica \(o frequentista\)](#)
- [Probabilità soggettiva](#)
- [Definizione assiomatica di probabilità](#)
- [Teoremi](#)

1. Introduzione; concetto di evento

Introduciamo il concetto di evento:

Chiameremo *evento* il verificarsi di un certo insieme di condizioni derivate da un **esperimento**:

Esperimento: lancio una volta un dado *Evento*: ottengo il numero 6

Parleremo di *evento certo* se l'evento si verifica sempre:

Esperimento: sopra il mio tavolo lascio libera una matita in aria *Evento*: essa cade sul tavolo

Parleremo di *evento impossibile* se l'evento non si verifica mai:

Esperimento: sopra il mio tavolo lascio libera una matita in aria *Evento*: essa sale fino al soffitto

Parleremo di *evento aleatorio* se l'evento può verificarsi oppure no:

Esperimento: lancio una volta un dado *Evento*: esce il numero 1

Diviene quindi naturale assegnare all'evento aleatorio un numero che esprima la quantità di possibilità del verificarsi dell'evento stesso:

$$p = P(E)$$

p e' la probabilita' che si verifichi l'evento E .

Esempio: se E e' l'evento uscita del numero 1 nel lancio di un dado, avendo il dado 6 facce sara':

$$p = P(E) = 1/6.$$

2. Spazio delle probabilita' ed eventi

Chiameremo *prova* una singola esecuzione di un dato esperimento.

Da una prova si ottiene un *risultato elementare*.

Chiameremo *universo o spazio delle probabilita' S* l'insieme di tutti i possibili risultati elementari di un esperimento.

Ad esempio l'universo per il lancio di un dado, chiamando le singole facce con il loro punteggio e':

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Si dice *evento E* un qualsiasi sottoinsieme dello spazio delle probabilita' S :

$$E \subseteq S$$

Cioe' un evento e' un *qualsunque* sottoinsieme dello spazio delle probabilita'.

Esempio:

Esperimento: lanciare una volta un dado *Evento*: ottenere un numero pari

L'evento e' il sottoinsieme $E = \{ 2, 4, 6 \}$

Dalle definizioni deriva che l'insieme di tutti gli eventi corrisponde all'*insieme potenza* dell'universo

Parleremo di *evento certo* se E coincide con S

Esempio:

Esperimento: lanciare una volta un dado *Evento*: ottenere un numero minore di 7

E' un evento certo perche' otterro' uno dei numeri 1,2,3,4,5,6 che sono tutti inferiori a 7.

Parleremo di *evento impossibile* se E coincide con l'insieme vuoto \emptyset

Esempio:

Esperimento: lanciare una volta un dado *Evento*: ottenere un numero maggiore di 7

E' un evento impossibile perche' otterro' uno dei numeri 1,2,3,4,5,6 e nessuno e' maggiore di 7

Come vedi esiste una stretta analogia fra gli insiemi e gli eventi: ad esempio lo spazio delle probabilita' puo' essere considerato il corrispondente dell'*insieme universo*; diviene quindi naturale applicare agli eventi le operazioni e la terminologia propria della teoria degli insiemi.

3. Operazioni sugli eventi

Consideriamo due eventi E_1 ed E_2 appartenenti ad una medesima prova.

Chiamiamo *evento somma* di E_1 ed E_2 l'evento:

$$E_3 = E_1 \cup E_2 \quad \text{od anche} \quad E_3 = E_1 + E_2$$

che risulta dal verificarsi di *almeno uno* dei due eventi E_1 ed E_2

Almeno uno significa:

- o si verifica il primo evento
- o si verifica il secondo evento
- o si verificano entrambi gli eventi.

Infatti si tratta dell'operazione di *unione* fra insiemi.

Useremo preferibilmente l'unione se parleremo di eventi come insiemi, mentre useremo la somma se parleremo di eventi per trovarne la probabilita'.

Chiamiamo *evento prodotto* di E_1 ed E_2 l'evento:

$$E_3 = E_1 \cap E_2 \quad \text{od anche} \quad E_3 = E_1 \cdot E_2$$

che risulta dal verificarsi contemporaneo di entrambi gli eventi E_1 ed E_2

Useremo preferibilmente l'intersezione se parleremo di eventi come insiemi, mentre useremo il prodotto se parleremo di eventi per trovarne la probabilita'.

Due eventi si dicono *complementari* (od opposti) se o si verifica l'uno oppure si verifica l'altro.

Come per il complementare negli insiemi vale:

$$E \cup \bar{E} = S \quad \bar{E} \cap E = \emptyset$$

Ricordo che S e' l' universo.

Due eventi si dicono *mutualmente incompatibili* se sono disgiunti, cioe' se vale:

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

Esempio:

Esperimento: lancio di un dado E_1 uscita del numero 1 E_2 uscita di un numero pari

La probabilita' che esca un numero pari uguale ad 1 e' nulla

Si definisce *sistema completo di eventi due a due incompatibili* un insieme di eventi tali che sia:

$$E_i \cap E_j = \emptyset$$

cioe' due eventi qualunque sono incompatibili tra loro ed inoltre valga:

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n = S$$

Corrisponde in teoria degli insiemi alla partizione di un insieme ed al ricoprimento finito.

4. Probabilita' classica

Anche qui, come negli altri tipi di probabilita', introdurremo solo i concetti essenziali tipici della teoria rimandando ad una trattazione generale nella probabilita' assiomatica.

a) Definizione classica di probabilita'

La probabilita' classica viene determinata "a priori" cioe' prima che l'evento si verifichi; per poterlo fare dovremo supporre che i possibili risultati elementari siano equiprobabili.

Esempio: lanciando un dado, se il dado non e' truccato, possiamo pensare che la probabilita' che esca una delle sei facce e' sempre la stessa.

Altro esempio: estraendo a caso una carta da un mazzo di 40 possiamo pensare che la probabilita' che esca e' sempre la stessa per ognuna delle 40 carte considerate.

Questo ci porta a definire la probabilita' classica in un gruppo completo di eventi due a due incompatibili.

Definiamo *probabilita' di un evento* il rapporto fra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili supposti tutti ugualmente possibili.

Indichiamo la probabilita' p di un evento E con i simboli:

$$p = P(E) = \frac{m}{n}$$

essendo m il numero dei casi favorevoli ed n il numero dei casi possibili.

Ad esempio: troviamo la probabilita' che lanciando un dado esca un numero pari.

I numeri pari sono 2, 4, 6 cioe' $m=3$

i casi possibili sono 1,2,3,4,5,6, cioe' $n=6$

$$p = P(E) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Valgono le proprieta':

- La probabilita' di un evento e' sempre compresa fra 0 ed 1 :

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

1 e' la probabilita' dell'evento certo $P(S) = 1$

0 e' la probabilita' dell'evento impossibile $P(\emptyset) = 0$

- Se E_1 ed E_2 sono eventi incompatibili si ha:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

- Se E ed \bar{E} sono eventi complementari si ha:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

b) Semplici esempi di calcolo di probabilita'

Vediamo ora alcuni semplici problemi di calcolo della probabilita' utilizzando la probabilita' classica.

- **Problema 1**

Calcolare la probabilita', lanciando un dado, di ottenere un numero superiore a 4

Nel lancio di un dado posso ottenere un numero superiore a 4 se esce 5 oppure 6, quindi ho due casi favorevoli

I casi possibili sono 6 (le sei facce del dado), quindi:

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333333... = 0,3 \approx 33,33\%$$

Ho usato il simbolo \sim per indicare l'approssimazione. Nella percentuale ho approssimato alla seconda cifra decimale. Per fare la percentuale basta spostare la virgola verso destra di 2 posti e dividere per 100:

$$0,3333 = 33,33/100 = 33,33\%$$

- **Problema 2**

Calcolare la probabilita', lanciando una moneta di ottenere testa

Nel lancio di una moneta posso ottenere o testa o croce (suppongo che la moneta non possa restare appoggiata su un bordo).

I casi favorevoli sono 1.

I casi possibili sono 2 (le due facce della moneta), quindi:

$$p = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

- **Problema 3**

Un sacchetto contiene 20 palline, 10 bianche, 6 rosse e 4 verdi.

Calcolare la probabilita' che, estraendo a caso una pallina, essa sia verde

Le palline verdi sono 4 quindi ho 4 casi favorevoli.

I casi possibili sono 20 (numero totale di palline), quindi:

$$p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

- **Problema 4**

Calcolare la probabilita', estraendo una carta da un mazzo di 40, di trovare un asso

In un mazzo di 40 carte vi sono 4 assi quindi ho quattro casi favorevoli.

I casi possibili sono 40, quindi:

$$p = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$$

c) Esempi di calcolo di probabilita' utilizzando il calcolo combinatorio

Utilizzando il calcolo combinatorio e' possibile risolvere problemi piu' complicati.

- **Problema 1**

Calcolare la probabilita' lanciando 3 dadi di ottenere sulle facce superiori tre numeri 6

Il caso favorevole e' uno solo: quando ottengo 6 su tutti e tre i dadi

I casi possibili sono le disposizioni con ripetizione di 6 oggetti presi 3 a 3 cioe' $D'_{6,3}$:

$$p = \frac{1}{D'_{6,3}} = \frac{1}{216} = 0.00462963 \sim 0,46\%$$

cioe':

$$= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} = 0.00462963 =$$

Per fare la percentuale sposto la virgola di due posti e divido per 100:

$$= 0.00462963 = \frac{0,462963}{100}$$

Ora approssimo alla seconda cifra decimale, e poiche' la terza cifra (2) e' inferiore a 5, tronco l'approssimazione alla seconda cifra ed ottengo:

$$= \frac{0,462963}{100} \sim \frac{0,46}{100} = 0,46\%$$

- **Problema 2**

Un sacchetto contiene 50 palline, 20 bianche e 30 rosse ;

Calcolare la probabilita' che, estraendo contemporaneamente due palline, essa siano entrambe rosse

Siccome le palline vengono estratte contemporaneamente non conta l'ordine e quindi useremo le combinazioni.

I casi possibili sono tutte le coppie che si possono formare con le 50 palline; $C_{50,2}$

I casi favorevoli sono tutte le coppie non ordinate che posso formare con le palline rosse $C_{30,2}$:

$$p = \frac{C_{30,2}}{C_{50,2}} = \frac{87}{245} = 0,3551020419... \sim 35,51\% \quad \text{Ecco i calcoli:}$$

Essendo $C_{50,2}$ al denominatore multiplico $C_{30,2}$ per l'inverso di $C_{50,2}$:

$$p = \frac{C_{30,2}}{C_{50,2}} = \frac{30!}{2! (30-2)!} \cdot \frac{2! (50-2)!}{50!} =$$

Otengo quindi:

$$= \frac{30!}{2! 28!} \cdot \frac{2! 48!}{50!} =$$

Ora semplifico quello che e' possibile ricordando la definizione di fattoriale :

$$= \frac{30 \cdot 29}{50 \cdot 49} =$$

Continuo a semplificare numeratore e denominatore:

$$= \frac{3 \cdot 29}{5 \cdot 49} = \frac{87}{245} = 0,3551020419 =$$

Per fare la percentuale sposto la virgola di due posti e divido per 100 :

$$= 35,51020419 = \frac{35,51020419...}{100} =$$

Ora approssimo alla seconda cifra decimale, e poiche' la terza cifra (0) e' inferiore a 5 tronco l'approssimazione alla seconda cifra ed ottengo:

$$= \frac{35,51020419...}{100} \sim \frac{35,51}{100} = 35,51\%$$

- **Problema 3**

Un sacchetto contiene 20 palline, 6 bianche, 12 rosse e 2 verdi;

Calcolare la probabilita' che, estraendo a caso contemporaneamente tre palline, esse siano tutte e tre rosse

In pratica devo considerare le possibili terne che posso formare senza considerarne l'ordine, cioe' combinazioni semplici.

I casi possibili sono le combinazioni di 20 oggetti presi 3 a 3

i casi favorevoli sono le combinazioni di 12 oggetti presi 3 a 3

$$p = \frac{C_{12,3}}{C_{20,3}} = \frac{11}{57} = 0,192982456... \sim 19,30\% \quad \text{Ecco i calcoli:}$$

Essendo $C_{20,3}$ al denominatore moltiplico $C_{12,3}$ per l'inverso di $C_{20,3}$:

$$p = \frac{C_{12,3}}{C_{20,3}} = \frac{12!}{3! (12-3)!} \cdot \frac{3! (12-3)!}{20!} =$$

Otengo quindi:

$$p = \frac{C_{12,3}}{C_{20,3}} = \frac{12!}{3! (12-3)!} \cdot \frac{3! (12-3)!}{20!} = \frac{12!}{3! \cdot 9} \cdot \frac{3! \cdot 17!}{20!} =$$

Ora semplifico quello che e' possibile ricordando la definizione di fattoriale :

$$p = \frac{C_{12,3}}{C_{20,3}} = \frac{12!}{3! (12-3)!} \cdot \frac{3! (12-3)!}{20!} = \frac{12!}{3! \cdot 9} \cdot \frac{3! \cdot 17!}{20!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{20 \cdot 19 \cdot 18} =$$

Continuo a semplificare numeratore e denominatore:

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{11}{19 \cdot 3} = \frac{11}{57} = 0,192982456... =$$

Per fare la percentuale sposto la virgola di due posti e divido per 100 :

$$= 0,192982456... = \frac{19,2982456...}{100} =$$

Ora approssimo alla seconda cifra decimale, e poiche' la terza cifra (8) e' superiore a 5 aumento la seconda cifra di un'unita' ed ottengo:

$$= \frac{19,2982456...}{100} \sim \frac{19,30}{100} = 19,30\%$$

Ho usato il simbolo \sim per indicare l'approssimazione

• **Problema 4**

Calcolare la probabilita' di ottenere un ambo al lotto giocando due numeri su una sola ruota

Siccome in una ruota ci sono 5 numeri i casi favorevoli sono quelli in cui ho i due numeri giocati fissi e gli altri 3 numeri variabili, cioe' tutte le terne che posso formare con gli 88 numeri restanti $C_{88,3}$

I casi possibili sono tutte le cinquine che posso formare con i 90 numeri $C_{90,5}$, quindi:

$$p = \frac{C_{88,3}}{C_{90,5}} = \frac{2}{801} = 0,002496879... \sim 0,25\% \quad \text{Ecco i calcoli:}$$

Essendo $C_{90,5}$ al denominatore moltiplico $C_{88,3}$ per l'inverso di $C_{90,5}$:

$$p = \frac{C_{88,3}}{C_{90,5}} = \frac{88!}{3! (88-3)!} \cdot \frac{5! (90-5)!}{90!} =$$

Otengo quindi :

$$= \frac{88!}{3! \cdot 85!} \cdot \frac{5! \cdot 85!}{90!} =$$

Ora semplifico quello che e' possibile ricordando la definizione di fattoriale:

$$= \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} =$$

Continuo a semplificare numeratore e denominatore :

$$= \frac{2}{9 \cdot 89} = \frac{2}{801} = 0,002496879... =$$

Per fare la percentuale sposto la virgola di due posti e divido per 100:

$$= 0,002496879... = \frac{0,2496879...}{100} =$$

Ora approssimo alla seconda cifra decimale, e poiche' la terza cifra (9) e' superiore a 5 aumento la seconda cifra di un'unita' ed ottengo:

$$= \frac{0,2496879...}{100} \sim \frac{0,25}{100} = 0,25\%$$

Al solito ho usato il simbolo \sim per indicare l'approssimazione.

Hai due probabilita' a favore su 801 probabilita' possibili: cioe' in media vinci una volta ogni quasi 400 puntate; considerando che la vincita ti viene pagata 250 volte la posta pensa se ti conviene giocare; ma riprenderemo l'argomento nella teoria dei giochi per esercizio prova a trovare le probabilita' di fare terno, quaterna e cinquina.

d) Probabilita' contraria

Introduciamo il concetto di *probabilita' contraria* q di un evento come la probabilita' che l'evento non accada.

Siccome l'evento accade (con probabilita' p) oppure non accade (con probabilita' q) e non ci sono altre alternative avremo che $p+q=1$.

Quindi possiamo definire la probabilita' contraria q come:

$$q = 1 - p$$

Il concetto di probabilita' contraria ci sara' molto utile per risolvere alcuni tipi di problemi, vediamo qualche esempio.

• **Problema 1**

*Un sacchetto contiene 50 palline, 10 bianche 15 rosse e 25 verdi ;
Calcolare la probabilita' che, estraendo una pallina a caso essa sia rossa o verde*

Il problema e' del tutto elementare, risolviamolo applicando la probabilita' contraria
L'uscita di una pallina rossa o verde e' l'evento contrario dell'uscita di una pallina bianca
I casi possibili sono 50 come il numero delle palline.
I casi favorevoli all'uscita di una pallina bianca sono 10.
Quindi:

$$\text{Probabilita' di uscita di una pallina bianca} = p = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0.20 = 20\%$$

Quindi la probabilita' contraria e':

$$\text{Probabilita' di uscita di una pallina rossa o verde} = q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.80 = 80\%$$

• **Problema 2**

Calcolare la probabilita' che, estraendo contemporaneamente due carte, da un mazzo di 40, esse non siano entrambe assi

Siccome le carte vengono estratte contemporaneamente non conta l'ordine e quindi useremo le combinazioni.

I casi possibili sono tutte le coppie che si possono formare con le 40 carte; $C_{40,2}$

Usiamo la probabilita' contraria: calcoliamo i casi favorevoli di estrarre contemporaneamente due assi.

I casi favorevoli sono tutte le coppie non ordinate che posso formare i 4 assi $C_{4,2}$.

Quindi avremo:

$$\text{Probabilita' di estrarre due assi} = p = \frac{C_{4,2}}{C_{40,2}} = \frac{1}{130} = 0.007692308... \sim 0,77\%$$

Quindi la probabilita' contraria:

$$\text{Probabilita' di non estrarre due assi} = q = 1 - p = 1 - \frac{1}{130} = 1 - 0.007692308... = 0.992307692 \sim 99,23\%$$

Ecco i calcoli:

Essendo $C_{40,2}$ al denominatore multiplico $C_{4,2}$ per l'inverso di $C_{40,2}$:

$$p = \frac{C_{4,2}}{C_{40,2}} = \frac{4!}{2! (4-2)!} \cdot \frac{2! (4-2)!}{40!} =$$

$$\text{Ottengo quindi :}$$

$$= \frac{4!}{2! 2!} \cdot \frac{2! 38!}{40!} =$$

Ora semplifico quello che e' possibile ricordando la definizione di fattoriale:

$$= \frac{4 \cdot 3}{40 \cdot 39} =$$

Continuo a semplificare numeratore e denominatore:

$$= \frac{1}{10 \cdot 13} = \frac{1}{130} = 0,007692308... =$$

Per fare la percentuale sposto la virgola di due posti e divido per 100 :

$$= 0,007692308... = \frac{0,7692308...}{100} =$$

Ora approssimo alla seconda cifra decimale, e poiche' la terza cifra (9) e' superiore a 5 aumento la seconda cifra di un'unita' ed ottengo:

$$= 0,007692308... = \frac{0,7692308...}{100} \sim \frac{0,77}{100} = 0,77\%$$

Al solito ho usato il simbolo \sim per indicare l'approssimazione.

e) Teoremi sul calcolo delle probabilita'

Vediamo ora un paio di teoremi che ci permetteranno di calcolare in modo semplice le probabilita' di eventi composti da piu' eventi elementari:

- Teorema della probabilita' totale
- Teorema della probabilita' composta

(1) Teorema della probabilita' totale

Consideriamo un evento composto da piu' eventi tra loro **mutualmente incompatibili** (nel senso che se succede l'uno non puo' succedere l'altro); allora possiamo dire che:

La probabilita' dell'evento totale e' uguale alla somma delle probabilita' degli eventi parziali, essendo gli eventi parziali fra loro incompatibili.

Chiariamo meglio su un esempio:

Trovare la probabilita' che estraendo una carta da un mazzo di 40 essa sia una figura oppure un asso.

La probabilita' e' composta dai due eventi :

- uscita di una figura
- uscita di un asso

I due eventi sono incompatibili perche' se la carta e' una figura allora non puo' essere un asso e viceversa posso applicare il teorema:

probabilita' che estraendo una carta da un mazzo di 40 essa sia una figura oppure un asso =
= probabilita' che la carta sia una figura + probabilita' che la carta sia un asso

Le figure sono 12 quindi la probabilita' di uscita di una figura e' 12 su 40.

Gli assi sono 4 quindi la probabilita' di uscita di un asso e' 4 su 40

$$p = \frac{12}{40} + \frac{4}{40} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

Nota bene:

E' possibile applicare il teorema della probabilita' totale quando puoi esprimere il problema con la particella "o" (oppure):

o succede il primo evento o succede il secondo oppure accade il terzo....

Corrisponde all'unione fra insiemi.

(2) Teorema della probabilita' composta

Consideriamo un evento composto da piu' eventi tali che siano indipendenti, nel senso che l'accadere del primo non influenzi l'accadere del secondo; allora possiamo dire che:

La probabilita' dell'evento composto e' uguale al prodotto delle probabilita' degli eventi componenti.

Se gli eventi non sono indipendenti posso ancora applicare il teorema ma le probabilita' vanno calcolate caso per caso.

Chiariamo meglio su due esempi. Il primo con eventi indipendenti:

Trovare la probabilita' che estraendo successivamente due carte da un mazzo di 40 e rimettendo la prima carta estratta nel mazzo siano la prima una figura e la seconda un asso.

La probabilita' e' composta dai due eventi:

- uscita di una figura
- uscita di un asso

Prima deve uscire una figura e poi deve uscire un asso e devono accadere entrambe gli eventi, ma il primo evento non influisce sul secondo quindi posso applicare il teorema:

probabilita' che estraendo due carte da un mazzo di 40 la prima sia una figura e la seconda un asso = probabilita' che la prima carta sia una figura · probabilita' che la seconda carta sia un asso

Le figure sono 12 quindi la probabilita' di uscita di una figura e' 12 su 40

Gli assi sono 4, quindi la probabilita' di uscita di un asso e' 4 su 40

$$p = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{3}{100} = 0,03 = 3\%$$

Trovare la probabilita' che estraendo successivamente due carte da un mazzo di 40, senza rimettere la prima estratta nel mazzo, siano la prima una figura e la seconda un asso.

La probabilita' e' composta dai due eventi:

- uscita di una figura
- uscita di un asso

Prima deve uscire una figura e poi deve uscire un asso e devono accadere entrambe gli eventi, quindi posso applicare il teorema.

Pero' l'uscita del primo influisce sulla probabilita' del secondo, nel senso che nel secondo evento ho una carta di meno per i casi possibili:

probabilita' che estraendo due carte da un mazzo di 40 la prima sia una figura e la seconda un asso = probabilita' che la prima carta sia una figura · probabilita' che la seconda carta sia un asso

Le figure sono 12 quindi la probabilita' di uscita di una figura e' 12 su 40

Gli assi sono 4 ma le carte rimaste dopo l'uscita della prima carta sono 39, quindi la probabilita' di uscita di un asso e' 4 su 39

$$p = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{2}{65} \sim 0,03 = 3\%$$

La probabilita' e' leggermente piu' del 3% (3,0769%), ma, approssimando, mettiamo il 3%

Nota bene: E' possibile applicare il teorema della probabilita' composta quando puoi esprimere il problema con la particella "e" (ed anche):

succede il primo evento e succede il secondo ed anche avviene il terzo....

Corrisponde all'intersezione fra insiemi.

f) Esercizi con utilizzo dei teoremi sul calcolo della probabilita'

Esercizi con uso della probabilita' totale

Esercizio 1

Trovare la probabilita' di estrarre il re di cuori oppure l'asso di picche da un mazzo di 52 carte.

Svolgimento:

Il problema mi dice che devo estrarre o il re di cuori o l'asso di picche.

I due eventi sono incompatibili quindi applico il teorema della probabilita' totale:

Probabilita' = probabilita' di estrarre il re di cuori + probabilita' di estrarre l'asso di picche

Calcolo le singole probabilita':

probabilita' di estrarre il re di cuori = 1/52

probabilita' di estrarre l'asso di picche = 1/52

$$\text{Probabilità totale} = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \sim 0,038 = 3,8\%$$

La probabilita' e' circa del 3,8%

Esercizio 2

Abbiamo un sacchetto con 10 palline bianche, 20 rosse e 30 nere: trovare la probabilita' di estrarre una pallina bianca oppure nera.

Svolgimento:

Il problema mi dice che devo estrarre o una pallina bianca oppure una pallina nera.

I due eventi sono incompatibili quindi applico il teorema della probabilità totale:

Probabilità = probabilità di estrarre una pallina bianca + probabilità di estrarre una pallina nera

Calcolo le singole probabilità:

Le palline in totale sono 60

probabilità di estrarre una pallina bianca = $10/60 = 1/6$

probabilità di estrarre una pallina nera = $30/60 = 1/2$

Probabilità totale = $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \sim 0,667 = 66,7\%$

La probabilità è circa del 66,7%

Esercizio 3

Nel gioco della roulette vi sono 36 numeri più lo zero

Trovare la probabilità dell'uscita alla roulette di un numero compreso tra 5 e 9 (compresi) oppure multiplo di 10.

Svolgimento:

Il problema mi dice che devo estrarre o un numero compreso tra 5 e 9 o un multiplo di 10 e i due eventi sono disgiunti; quindi applico il teorema della probabilità totale.

Probabilità = probabilità di estrarre un numero compreso tra 5 e 9 + probabilità di estrarre un multiplo di 10

Calcolo le singole probabilità:

probabilità di estrarre un numero compreso tra 5 e 9 = $5/37$

probabilità di estrarre un multiplo di 10 = $3/37$

Probabilità totale = $\frac{5}{37} + \frac{3}{37} = \frac{8}{37} \sim 0,216 = 21,6\%$

La probabilità è circa del 21,6%

Esercizio 4

Trovare la probabilità che su una determinata ruota del lotto esca il numero 2.

Svolgimento:

Il problema mi dice che devo estrarre il numero 2 o come primo numero oppure come secondo, oppure come terzo, oppure come quarto, oppure come quinto.

Gli eventi sono tra loro incompatibili quindi applico il teorema della probabilità totale:

Probabilità = probabilità che il numero 2 sia il primo estratto + probabilità che sia il secondo estratto + probabilità che sia il terzo estratto + probabilità che sia il quarto estratto + probabilità che sia il quinto estratto.

Da notare che ogni volta che passo ad un altro estratto i numeri possibili diminuiscono di uno perché un numero è già stato estratto:

probabilità che il numero 2 sia il primo estratto = $1/90$

probabilità che il numero 2 sia il secondo estratto = $1/89$

probabilità che il numero 2 sia il terzo estratto = $1/88$

probabilità che il numero 2 sia il quarto estratto = $1/87$

probabilità che il numero 2 sia il quinto estratto = $1/86$

Probabilità totale = $\frac{1}{90} + \frac{1}{89} + \frac{1}{88} + \frac{1}{87} + \frac{1}{86} = \frac{299731524}{5273912160} \sim 0,057 = 5,7\%$

Faccio il minimo comune multiplo:

m.c.m. = $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 = 5273912160$

$$= \frac{58599024 + 59257440 + 59930820 + 60619680 + 61324560}{5273912160} = \frac{299731524}{5273912160} = 0,056832862$$

Approssimo alla terza cifra decimale; siccome la quarta cifra è 8 approssimo per eccesso a 0,057:

Probabilità totale $\sim 0,057 \sim 5,7\%$

La probabilità è circa del 5,7%

Esercizi con uso della probabilità composta

Esercizio 1

Trovare la probabilità, estraendo una carta da un mazzo di 40, e rimettendo la carta nel mazzo prima della seconda estrazione, di estrarre due volte l'asso di bastoni.

Svolgimento:

Il problema mi dice che devo estrarre l'asso di bastoni la prima volta, poi di rimettere la carta nel mazzo ed estrarre una seconda volta l'asso di bastoni.

Siccome deve accadere sia il primo evento che il secondo applico il teorema della probabilità totale:

Probabilità = (probabilità di estrarre l'asso di bastoni) · (probabilità di estrarre l'asso di bastoni)

Calcolo le singole probabilità:

probabilità di estrarre l'asso di bastoni = 1/40

probabilità di estrarre l'asso di bastoni = 1/40

Probabilità composta = $\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{1600} \sim 0,000625 = 0,06\%$

La probabilità è circa del 0,06%

cioè può accadere sei volte su diecimila prove.

Esercizio 2

Abbiamo un'urna con 10 palline bianche, 20 rosse e 30 nere: trovare la probabilità di estrarre successivamente due palline bianche senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna.

Svolgimento:

Estraggo la prima pallina e poi la seconda senza rimettere la prima nell'urna.

Il problema mi dice che devo estrarre prima una pallina bianca e poi ancora una pallina bianca.

I due eventi devono succedere entrambi quindi applico il teorema della probabilità composta:

Probabilità = (probabilità di estrarre una pallina bianca) · (probabilità di estrarre una pallina bianca)

Calcolo le singole probabilità:

Le palline in totale sono 60 di cui 10 bianche, nella seconda estrazione restano 59 di cui 9 bianche:

probabilità di estrarre una pallina bianca = 10/60 = 1/6

probabilità di estrarre la seconda pallina bianca = 9/59

Probabilità totale = $\frac{1}{6} \cdot \frac{9}{59} = \frac{3}{118} \sim 0,025 = 2,5\%$

La probabilità è circa del 2,5%

Esercizio 3

Nel gioco della roulette vi sono 36 numeri più lo zero.

Trovare la probabilità alla roulette di fare due volte "en plein" su due giocate successive puntando sul numero 3.

Svolgimento:

"En plein" è l'uscita del numero che si è puntato.

Il problema mi dice che deve uscire il 3 nella prima giocata e poi il numero 3 anche nella seconda giocata.

Gli eventi devono accadere entrambi quindi applico il teorema della probabilità composta:

Probabilità = (probabilità di uscita del numero 3 alla prima giocata) · (probabilità di uscita del numero 3 alla seconda giocata)

Calcolo le singole probabilità:

probabilità di uscita del 3 numero alla prima giocata = 1/37

probabilità di uscita del numero 3 alla seconda giocata = 1/37

Probabilità totale = $\frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{1369} \sim 0,0007 = 0,07\%$

La probabilità è circa del 0,07%

L'evento (che è il sogno di ogni giocatore) può capitare 7 volte su diecimila coppie di estrazioni.

Esercizio 4

Trovare la probabilità, nel lancio di una moneta, di fare "testa" 4 volte consecutive.

Svolgimento:

La moneta per definizione ha due facce, una detta "testa" e l'altra detta "croce".

Il problema mi dice che deve uscire testa nel primo lancio e poi testa nel secondo lancio e poi testa nel terzo lancio e infine testa nel quarto lancio.

Gli eventi devono accadere tutti quindi applico il teorema della probabilità composta;

Probabilità = (probabilità di testa al primo lancio) · (probabilità di testa al secondo lancio) · (probabilità di testa al terzo lancio) · (probabilità di testa al quarto lancio)

Mi sembra brutto dire probabilità di uscita di testa:

Calcolo le singole probabilità:

probabilità di testa al primo lancio = 1/2

probabilità di testa al secondo lancio = 1/2

probabilità di testa al terzo lancio = 1/2

probabilità di testa al quarto lancio = 1/2

Probabilità totale = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \sim 0,0625 = 6,25 \%$
 La probabilità è circa del 6,25%

Esercizi piu' complicati

Per risolvere questi esercizi devi riscrivere il problema mettendolo nella forma succede questo o succede quello, succede questo e succede quest'altro.

Se i fatti sono incompatibili al posto di **o** puoi mettere il **+** mentre al posto di **e** puoi mettere il **·** se gli eventi sono indipendenti.

Esercizio 1

Trovare la probabilità, estraendo due carte da un mazzo di 40, e rimettendo la carta nel mazzo prima della seconda estrazione, di estrarre una figura ed un asso.

Svolgimento:

Il problema mi dice che devo estrarre la prima volta, poi di rimettere la carta nel mazzo ed estrarre una seconda volta: posso avere due possibilità'.

I possibilità': come prima carta una figura e come seconda un asso.

oppure:

II possibilità' come prima carta un asso e come seconda una figura.

Per ottenere il risultato accade la prima o accade la seconda.

Quindi posso scrivere:

Probabilità = [possibilità' I + possibilità' II] = (probabilità' di estrarre una figura) · (probabilità' di estrarre un asso) + (probabilità' di estrarre un asso) · (probabilità' di estrarre una figura)

Calcolo le singole probabilità':

Possibilità' I

probabilità' di estrarre una figura = 12/40

probabilità' di estrarre un asso = 4/40

Possibilità' II

probabilità' di estrarre un asso = 4/40

probabilità' di estrarre una figura = 12/40

Probabilità = $\frac{12}{40} \cdot \frac{4}{40} + \frac{4}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{3}{100} + \frac{3}{100} \sim 0,06 = 6,0 \%$

La probabilità è circa del 6%

Nel 6,0% lo zero dopo la virgola è importante perché indica il grado di precisione della misura (fino alla prima cifra decimale).

Esercizio 2

Abbiamo un'urna con 10 palline bianche, 20 rosse e 30 nere: trovare la probabilità di estrarre due palline di colore diverso senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna

Svolgimento:

Abbiamo 6 possibilità':

- I. **Prima pallina bianca e seconda rossa**
- II. **Prima pallina rossa e seconda bianca**
- III. **Prima pallina bianca e seconda nera**
- IV. **Prima pallina nera e seconda bianca**
- V. **Prima pallina rossa e seconda nera**
- VI. **Prima pallina nera e seconda rossa**

La probabilità sarà data dalla somma delle varie possibilità':

Probabilità = possibilità' I + possibilità' II + possibilità' III + possibilità' IV + possibilità' V + possibilità' VI = (probabilità' di estrarre una pallina bianca) · (probabilità' di estrarre una pallina rossa) + (probabilità' di estrarre una pallina rossa) · (probabilità' di estrarre una pallina bianca) + (probabilità' di estrarre una pallina bianca) · (probabilità' di estrarre una pallina nera) + (probabilità' di estrarre una pallina nera) · (probabilità' di estrarre una pallina bianca) + (probabilità' di estrarre una pallina rossa) · (probabilità' di estrarre una pallina nera) + (probabilità' di estrarre una pallina nera) · (probabilità' di estrarre una pallina rossa) =

Calcolo le singole probabilità' per le varie possibilità'.

Le palline in totale sono 60, nella seconda estrazione ne restano 59

- I. probabilita' di estrarre una pallina bianca = $10/60 = 1/6$
 probabilita' di estrarre la seconda pallina rossa = $20/59$
- II. probabilita' di estrarre una pallina rossa = $20/60 = 1/3$
 probabilita' di estrarre la seconda pallina bianca = $10/59$
- III. probabilita' di estrarre una pallina bianca = $10/60 = 1/6$
 probabilita' di estrarre la seconda pallina nera = $30/59$
- IV. probabilita' di estrarre una pallina nera = $30/60 = 1/2$
 probabilita' di estrarre la seconda pallina bianca = $10/59$
- V. probabilita' di estrarre una pallina rossa = $20/60 = 1/3$
 probabilita' di estrarre la seconda pallina nera = $30/59$
- VI. probabilita' di estrarre una pallina nera = $30/60 = 1/2$
 probabilita' di estrarre la seconda pallina rossa = $20/59$

$$\text{Probabilità} = \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{59} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{59} + \frac{1}{6} \cdot \frac{30}{59} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{59} + \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{59} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{59} = \frac{110}{177} \cong 0,621 = 62,1\%$$

La probabilita' e' circa del 62,1% per fare prima i calcoli puoi notare che pe possibilita' I con II , III con IV e V con VI hanno la stessa probabilita'.

Esercizio 3

Trovare la probabilita', utilizzando un mazzo di 52 carte, di estrarre 3 carte dello stesso seme sempre rimettendo la carte estratta nel mazzo.

Svolgimento:

"3 carte dello stesso seme" significa 3 quadri oppure 3 cuori oppure 3 fiori oppure 3 picche

Abbiamo 4 eventi composti:

- I. **Quadri la prima carta e la seconda e la terza**
- II. **Cuori la prima carta e la seconda e la terza**
- III. **Fiori la prima carta e la seconda e la terza**
- IV. **Picche la prima carta e la seconda e la terza**

Gli eventi composti sono fra loro incompatibili quindi applico la probabilita' totale:

Probabilita' = possibilita' I + possibilita' II + possibilita' III + possibilita' IV =

Ogni possibilita' e' composta di 3 eventi indipendenti, per calcolarne la probabilita' applico la probabilita' composta.

= (prima quadri)·(seconda quadri)·(terza quadri)+(prima cuori)·(seconda cuori)·(terza cuori)+(prima fiori)·(seconda fiori)·(terza fiori)+(prima picche)·(seconda picche)·(terza picche)

Calcolo le singole probabilita'.

Per fare prima notiamo che abbiamo lo stesso numero (13) di carte di quadri, cuori, fiori e picche quindi **probabilita' di uscita di una carta di un seme particolare = $13/52 = 1/4$**

$$\text{Probabilità totale} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \cong 0,0625 = 6,25\%$$

La probabilita' e' del 6,25

Prova a risolvere l'esercizio senza rimettere la carta nel mazzo.

Esercizio 4

Abbiamo un'urna con 10 palline bianche, 20 rosse e 30 nere: trovare la probabilita' di estrarre contemporaneamente 3 palline dello stesso colore

Svolgimento

Devono uscire o tre palline bianche o 3 palline rosse o tre palline nere

Gli eventisono incompatibili quindi applico il teorema della probabilita' totale

Probabilita' = (probabilita' 3 bianche) + (probabilita' 3 rosse) + (probabilita' 3 nere)

Siccome le palline vengono estratte contemporaneamente mi conviene usare le combinazioni [vedi problema 2 e 3](#)

Calcolo le singole probabilita':

$$\text{3 bianche} = \frac{C_{10,3}}{C_{60,3}} = \frac{6}{1711}$$

$$3 \text{ rosse} = \frac{C_{20,3}}{C_{60,3}} = \frac{57}{1711}$$

$$3 \text{ nere} = \frac{C_{30,3}}{C_{60,3}} = \frac{203}{1711}$$

$$\text{Probabilità totale} = \frac{6}{1711} + \frac{57}{1711} + \frac{203}{1711} + \frac{266}{1711} \sim 0,155 = 15,5\%$$

La probabilità è circa del 15,5%

Nota! Potevo ancora applicare i teoremi per calcolare le probabilità di uscita di 3 carte uguali: ad esempio (cuori la prima e cuori la seconda e cuori la terza) =
 $= 10/60 \cdot 9/59 \cdot 8/58 = 6/1711$

perché estrarre tre palline **contemporaneamente** equivale all'estrazione **senza rimettere** la pallina estratta nell'urna, ma il calcolo è più veloce usando le combinazioni

Esercizio: prova a svolgere l'esercizio 3 senza rimettere la carta nel mazzo ed usando le combinazioni

g) Limiti della probabilità classica

La teoria classica della probabilità è una teoria "a priori" cioè indica quale probabilità ha un evento che ancora deve accadere, però tutti i possibili esiti di un evento debbono essere ugualmente possibili e qui abbiamo una grossa difficoltà.

Non è possibile nel mondo reale avere l'esatta uguale possibilità fra eventi diversi.

Per quanto un dado sia fatto bene, magari a livello microscopico, i suoi spigoli e le sue facce saranno tra loro differenti.

Sarà sufficiente che un tavolo di una roulette sia leggermente non in orizzontale, oppure che la ruota sia leggermente deformata per avere la maggior uscita di certi numeri piuttosto che di certi altri.

Osservate un'estrazione di numeri al lotto: vedrete che in certe ruote escono di più i numeri bassi ed in altre di più i numeri alti questo penso sia dovuto al fatto che nel primo caso sono stati introdotti i numeri partendo dal 90 fino ad arrivare all'1, mentre nel secondo caso i numeri sono stati introdotti nell'urna in ordine crescente e per quanto si mescoli, qualcosa resta.

Esistono problemi per cui non è possibile applicare la probabilità classica.

Ad esempio, se dico che la squadra A ha il doppio di possibilità di vincere una determinata partita rispetto alla squadra B, non si capisce come tale probabilità sia ricavata.

Se parlo di colpire un piattello con un colpo di fucile non posso applicare la probabilità classica.

Come posso definire la probabilità di sentire il segnale di occupato facendo un numero di telefono?

In problemi scientifici e tecnologici la probabilità classica incontra difficoltà insuperabili.

Ad esempio è quasi impossibile determinare la probabilità per un singolo elettrone di fare un certo salto di orbitale oppure per un neutrone di collidere con un nucleo di uranio utilizzando la probabilità classica e le cose peggiorano considerando oggetti ancora più piccoli quali i quark.

Esistono anche problemi in cui il numero di risultati possibili è infinito e quindi occorre introdurre dei nuovi concetti per poterli affrontare.

Per questi motivi è necessario introdurre nuovi tipi di probabilità, che, conservando comunque i risultati della probabilità classica, permettano di superare le difficoltà qui sopra elencate.

5. Probabilità statistica (o frequentista)

a) Definizione di frequenza

Facciamo un gioco: lancio una moneta 20 volte e segno il numero di volte che esce testa. Supponiamo che testa esca 12 volte.

Allora chiamo frequenza dell'evento "uscita di testa":

$$f = \frac{12}{20}$$

il rapporto fra il numero di eventi favorevoli ed il numero di prove fatte.

In generale chiameremo **frequenza** :

$$f = \frac{v}{n}$$

Il rapporto fra il numero dei casi favorevoli usciti ed il numero delle prove fatte

Da notare che la frequenza si può applicare anche in casi in cui non potremmo applicare la probabilità: ad esempio sarebbe impossibile calcolare la probabilità di superare l'esame di analisi 1 nel corso del Prof. ***** mentre possiamo benissimo calcolarne la frequenza: basterà prendere le tabelle degli esami di analisi 1 che ha tenuto il Prof. ***** e considerare il numero dei promossi ed il numero degli esaminati e farne il rapporto .

b) Differenze fra frequenza e probabilità

La frequenza e la probabilità sono due concetti del tutto diversi fra loro:

- **la probabilità va calcolata "a priori"** cioè prima che l'evento accada;
- **la frequenza va calcolata "a posteriori"** e dopo un numero congruo di prove, cioè dopo che gli eventi sono accaduti.

Anche la frequenza, come la probabilità, è un numero compreso fra 0 ed 1, però la frequenza 0 non implica che l'evento sia impossibile come la frequenza 1 non implica necessariamente che l'evento sia certo.

Ad esempio se lancio tre volte una moneta ed ottengo 3 volte testa la frequenza di uscita di testa sarà 1 e la frequenza di uscita di croce sarà 0 ma l'evento "uscita di testa" non è certo come non è impossibile l'evento "uscita di croce".

c) Legge dei grandi numeri (o legge empirica del caso)

Partiamo da un semplice esempio: lanciamo una moneta 10 volte, 100 volte, 1000 volte e controlliamo l'evento "uscita di testa". Io ho ottenuto questi risultati:

Numero lanci	Uscita di testa	Frequenza di uscita di testa
10	6	0,60 = 60%
100	56	0,56 = 56%
1000	532	~0,53 = 53%

Osserviamo che mentre aumentano in numero gli scarti dal valore teorico il valore della frequenza si avvicina a quello della probabilita' (0,5=50%).

Infatti gli scarti dal valore teorico (meta' dei lanci) sono:

per 10 lanci abbiamo 6 teste quindi scarto = 1

per 100 lanci abbiamo 56 teste quindi scarto = 6

per 1000 lanci abbiamo 532 teste quindi scarto = 32

La frequenza invece e':

per 10 lanci e' 0,60

per 100 lanci e' 0,56

per 1000 lanci e' 0,53

Se aumentiamo il numero di lanci avremo che il valore della frequenza si avvicina sempre piu' a quello della probabilita' (0,50)

Un esperimento di questo genere ci porta ad enunciare una legge che collega strettamente la frequenza alla probabilita' classica:

Legge dei grandi numeri:

All'aumentare del numero delle prove fatte il valore della frequenza tende al valore teorico della probabilita'.

Attenzione a considerare in modo corretto la legge dei grandi numeri: se ad esempio ho, lanciando una moneta, l'uscita di testa per 6 volte di seguito non e' che nel lancio successivo e' piu' probabile che esca croce invece di testa: le probabilita' di uscita di testa o di croce sono **esattamente** le stesse.

d) Probabilita' statistica

Il fatto che la frequenza, all'aumentare del numero delle prove fatte, tenda al valore della probabilita' classica ci fa pensare che in fenomeni in cui la probabilita' classica non e' applicabile sia possibile considerare la frequenza di eventi gia' accaduti e considerarla come probabilita' di eventi futuri.

Cioe' in eventi in cui non si puo' applicare la probabilita' classica, ma si possano fare numerose prove possiamo considerare la frequenza degli eventi gia' accaduti come probabilita' per gli eventi dello stesso tipo che potranno accadere.

In tale caso parleremo di probabilita' statistica.

Definizione:

La probabilita' statistica di un evento casuale (aleatorio) e' un numero che esprime la frequenza relativa dell'evento in un gran numero di prove precedenti tutte fatte nelle stesse condizioni.

Esempio: per costruire le tabelle di probabilita' di vita e di morte che usano le assicurazioni sulla vita si calcolano le frequenze dei decessi relativamente alle varie fasce di eta' consultando gli archivi anagrafici comunali.

Va da se' che per la probabilita' statistica valgono tutte le proprieta' e tutti i teoremi gia' visti per la probabilita' classica.

e) Limiti della probabilita' statistica

Per poter avere un numero affidabile da dare alla probabilita' statistica occorre che la frequenza sia calcolata su un numero elevato di casi, questo fatto esclude dalla possibilita'

di utilizzare la probabilita' statistica per quei casi in cui il numero di prove ripetute e' basso o in cui le condizioni sono variate.

Come esempio consideriamo la probabilita' che nel prossimo derby Inter-Milan vinca l'Inter. Se proviamo a calcolare la frequenza considerando i vari derby gia' giocati abbiamo che le prove gia' effettuate non sono sufficienti a darci un numero affidabile ed anche la composizione delle squadre e' variata nel tempo.

E' quindi necessario sviluppare un altro tipo di probabilita' che sia possibile utilizzare in questi casi.

6. Probabilita' soggettiva

a) Introduzione

Alla probabilita' soggettiva e' legato uno dei piu' bei ricordi della mia carriera di insegnante (*Scheda n. C1*).

Ci sono eventi per cui non e' possibile dare una definizione precisa di probabilita': ad esempio qual'e' la probabilita' che in una partita, ad esempio Inter-Roma vinca l'Inter?

- Non possiamo usare la probabilita' classica perche' non possiamo definire il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili.
- Non possiamo usare la probabilita' frequentista perche' in primo luogo sono pochi gli eventi accaduti su cui basarsi (le partite gia' effettuate fra inter e Roma), inoltre una squadra non e' fissa, ma varia a seconda della sua composizione e dello stato dei suoi componenti: se un attaccante si fa male sara' sostituito da un altro con diverse capacita' agonistiche e le probabilita' di vincita della squadra varieranno.

E' pero' possibile prefigurarsi personalmente una probabilita' dicendosi: "Se si giocassero in questo momento 100 partite, secondo me, quante ne vincerebbe l'Inter, quante la Roma e quante sarebbero pareggiate?"

Se conosco bene l'argomento ed il mio giudizio e' abbastanza oggettivo, cioe' non falsato da passione sportiva, ottengo una probabilita' abbastanza accettabile .

Scheda n. C1 :Ricordi di un noioso professore

Eravamo circa alla meta' degli anni 70 ed insegnavo matematica applicata ad un Istituto Tecnico Commerciale a Cagliari.

Avevo una classe quarta molto intelligente, ma piuttosto svagata e poco disposta ad impegnarsi seriamente. Era un venerdi' di meta' marzo e cercavo di spiegare appunto le probabilita' ed i primi rudimenti di statistica. La classe non solo non mi seguiva, ma sembrava occupata in altre faccende: osservando con piu' attenzione mi sono accorto che l'impegno degli alunni era di compilare un pacco di schedine del totocalcio. Sequestro le schede, faccio una paternale, e provo a riprendere l'argomento, ma mi accorgo che lo scrivere di nascosto le schedine continua.

Capisco che l'argomento teorico e' noioso e che sarebbe inutile insistere, mi viene un'idea: dico alla classe: "*Visto che volete fare la schedina, almeno facciamola con metodo statistico applicando la probabilita' soggettiva:*

Lupini venga alla lavagna e scriva la prima partita.

Ora vi chiamero' uno per uno: se pensate che vinca la prima squadra, Lupini fara' un segno sulla casella dell'uno; se pensate che vinca la seconda, il segno verra' fatto sulla casella del due. Se pensate ad un pareggio facciamo due segni, uno sull'uno e l'altro sul due.

Alla fine contiamo i segni e facciamo la percentuale fra i segni dell'uno e tutti i segni: se la percentuale e' superiore al 70% mettiamo 1, se e' inferiore al 30% mettiamo 2 e se invece e' compresa fra 40% e 60% mettiamo x; negli altri casi mettiamo entrambe i risultati (se ad esempio viene tra 30% e 40% mettiamo x 2, se viene tra 60% e 70% mettiamo 1 x)".

Attirata cosi' la loro attenzione ho chiarito meglio il concetto di probabilita' soggettiva e, quando hanno capito

bene, abbiamo compilato la schedina, fatte le percentuali e completato un sistema giusto in tempo prima che suonasse la campanella.

Appena finito Lupini e' saltato su:

"Adesso fuori 200 lire per uno che ce lo giochiamo".

Così' ognuno di noi ha tirato fuori le 200 lire.

Il lunedì successivo appena arrivato a scuola sono stato circondato dagli alunni: avevamo fatto un 12 e qualche 11; ricordo che la vincita era di circa 400.000 lire (in pratica più del mio stipendio di due mesi); il genitore di un alunno si incaricò di ritirare la vincita ad Ancona ed a trasformarla in calcolatrici elettroniche: una per ogni alunno della classe ed una per me.

Da notare che le calcolatrici erano molto costose e da poco avevano cominciato a circolare in Italia.

Misi in un cassetto il mio regolo calcolatore e preparai la lezione successiva sull'uso della calcolatrice. Quella fu l'unica volta che vinsi qualcosa al totocalcio.

b) Definizione

Secondo la teoria soggettiva:

La probabilità e' la misura del grado di fiducia che un individuo coerente assegna al verificarsi di un dato evento in base alle sue conoscenze

Continuiamo come esempio con la nostra probabilità applicata al mondo del calcio.

Notare che l'individuo deve essere coerente, cioè non deviato da passioni, ed inoltre deve avere delle conoscenze (tipo sapere quali sono i giocatori che scenderanno in campo e com'è la loro forma fisica).

In pratica se attribuisco ad un evento la probabilità del 90% devo essere disposto a pagare una somma di 90 per riceverne 100 in caso di evento che accade oppure di perdere tutto in caso di evento che non accade.

Esempio: se penso che le probabilità di vincita dell'Inter nella partita Inter-Lazio siano del 70% devo essere disposto a puntare 70 euro sulla vincita dell'Inter per riceverne 100 in caso di vittoria dell'Inter e perdendo tutto in caso di sconfitta o pareggio della squadra.

È fondamentale, che il soggetto abbia il maggior numero di informazioni possibili e, tramite esse, sappia attribuire determinate probabilità a determinati eventi.

In tal caso la probabilità soggettiva si può ritenere affidabile.

c) Proprietà della probabilità soggettiva

La probabilità soggettiva deve godere delle stesse proprietà della probabilità classica, cioè (ripetiamole, un ripasso fa sempre bene):

- La probabilità di un evento e' sempre compresa fra 0 ed 1

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

1 e' la probabilità dell'evento certo $P(S) = 1$

0 e' la probabilità dell'evento impossibile $P(\emptyset) = 0$

- Se E_1 ed E_2 sono eventi incompatibili si ha:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

- Se E ed \bar{E} sono eventi complementari si ha:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

d) Limiti della probabilita' soggettiva

Purtroppo la probabilita' soggettiva ha due grossi handicap che ne limitano l'efficacia:

- L'individuo che elabora la probabilita' deve essere "coerente", cioe' deve attribuire lo stesso valore di probabilita' a fenomeni simili, cosa non sempre facile se una persona (tipo un tifoso) e' trascinato da passioni o da valutazioni personali.
- Chi elabora deve essere in possesso del maggior numero di dati possibile: piu' dati ho, meglio posso individuare il valore di probabilita': se so che un certo giocatore non scendera' in campo posso individuare meglio la probabilita' dell'evento "vincita della squadra" e se faccio il bookmaker offriro' una quota diversa dagli altri bookmakers che non conoscono quell'informazione.

Con tutto cio' la probabilita' soggettiva e' un grosso aiuto per la soluzione di molti problemi che non sarebbe possibile affrontare con gli altri tipi di probabilita'.

7. Definizione assiomatica di probabilita'

Per il biennio unificato e per alcuni tipi di scuola e' sufficiente la parte di probabilita' sin qui sviluppata. Invece per il triennio, nella maggior parte delle scuole, si sviluppa la teoria assiomatica..

Abbiamo cosi' tre tipi diversi di probabilita' che e' possibile applicare in contesti diversi: occorre ora unificare il tutto per avere una costruzione organica per la probabilita'. Per fare cio' considereremo degli oggetti generici (eventi) e ne considereremo lo spazio in cui sono definiti (spazio degli eventi) e ne daremo i postulati che regoleranno la teoria delle probabilita' assiomatica, in modo tale che restringendo tale teoria alla teoria classica, alla teoria frequentista od alla teoria soggettiva possiamo ritrovare le proprieta' già viste.

a) Campo di eventi

Se vuoi approfondire sulla [definizione di sigma-algebra](#) (*Scheda n.C2*)

Sia dato un insieme S di eventi elementari:

consideriamo una famiglia E di sottoinsiemi di S tale che valgano le proprieta':

- S e' un elemento dell'insieme E
 $S \in E$
- Se A e B sono sottoinsiemi di S e sono elementi di E allora anche \bar{A} , \bar{B} , $A \cap B$, $A \cup B$ appartengono ad E
in pratica significa che l'insieme E e' chiuso rispetto alle operazioni elementari di unione, intersezione e complementare

Chiameremo allora l'insieme E campo di eventi

Corrisponde al concetto di [sigma-algebra](#), infatti:

- poiche' $S \in E$ anche il complementare di S , $S = \emptyset \in E$
- Se l'insieme $A \in E$ allora anche il complementare $\bar{A} \in E$
- Siccome E contiene anche l'unione dei suoi singoli elementi, allora vale anche la terza proprieta' della sigma-algebra

Comunque, per semplicita', considereremo, per ora, E come un insieme finito (discreto); piu' avanti, nelle distribuzioni di probabilita', considereremo anche campi di probabilita' infiniti (continui).

Scheda n. C2 : Sigma-algebra

Consideriamo un insieme X ed un insieme \mathcal{X} di suoi possibili sottoinsiemi:

\mathcal{X} e' detto **sigma-algebra** se valgono le proprieta' :

- 1) \emptyset e X appartengono a \mathcal{X} , cioe' vi appartengono sia l'insieme vuoto che tutto l'insieme di partenza
- 2) Se A appartiene ad \mathcal{X} , allora anche l'insieme complementare \bar{A} di A appartiene a \mathcal{X}

Il **complementare** e' quell'insieme tale che $A \cup \bar{A} = X$ ed $A \cap \bar{A} = \emptyset$

- 3) se (A_n) e' una successione di insiemi appartenenti ad \mathcal{X} allora anche:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ appartiene ad } \mathcal{X}$$

cioe' se l'insieme \mathcal{X} contiene infiniti insiemi in successione allora contiene anche l'unione di tutti gli insiemi della successione

Una coppia ordinata (X, \mathcal{X}) e' detta **spazio misurabile**.

b) Assiomi della probabilita'

Consideriamo il caso che l'insieme S , di cui consideriamo i sottoinsiemi, sia finito: allora ad ogni evento A e' associato un numero $P(A)$ se valgono i seguenti assiomi:

- $P(A) \geq 0$
- $P(S) = 1$
- Se A e B sono eventi incompatibili (cioe' $A \cap B = \emptyset$) allora:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

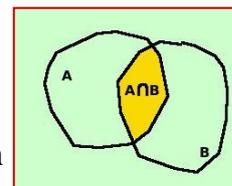
Il numero reale $P(A)$ e' detto probabilita' dell'evento A .

Da notare che il terzo postulato corrisponde al teorema della probabilita' totale, che nella probabilita' classica. era stato dimostrato.

c) Conseguenze

Dai postulati deriva che:

- $1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$
Quindi $P(\emptyset) = 0$
La probabilita' dell'evento impossibile e' nulla.
- Dato un qualunque insieme A appartenente ad S abbiamo:
 $1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$
Quindi, ricavando $P(A)$ ho: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
La probabilita' di un evento e' uguale ad 1 meno la probabilita' dell'evento contrario.
- Essendo $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ne segue che:
 $0 \leq P(A) \leq 1$
La probabilita' di un evento e' sempre compreso fra 0 ed 1.
- Se $A \subseteq B$ allora $P(A) \leq P(B)$
Se A e' contenuto in B allora la probabilita' dell'evento A e' minore della probabilita' dell'evento B (e' uguale se $A = B$).
- Se A e B sono due eventi qualsiasi si ha sempre:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Infatti se considerassi solo $P(A)$ e $P(B)$, considererei due volte la parte comune $A \cap B$

**Esempio:**

Calcolare la probabilita' di estrarre da un mazzo di quaranta carte una carta di denari oppure una figura:

Evento A: estrazione di una carta di denari

Evento B: estrazione di una figura

Le carte di denari sono 10 $P(A) = 10/40 = 1/4$

Le figure sono 12 $P(B) = 12/40 = 3/10$

Le carte che sono contemporaneamente figure e denari sono 3 $P(A \cap B) = 3/40$

quindi: $P = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 10/40 + 12/40 - 3/40 = 19/40 \sim 0,475 = 47,5\%$

8. Teoremi

Quando si calcolano le probabilita' di eventi quasi sempre e' impossibile riferirsi a fatti sperimentali: ad esempio se devo calcolare la probabilita' di fluttuazione di certe nuove azioni finanziarie non posso calcolarne la probabilita' mediante fatti gia' accaduti (le azioni sono nuove) ma solamente con criteri che coinvolgono la conoscenza del possibile mercato presente e futuro.

Cio' porta a sviluppare il calcolo delle probabilita' mediante metodi indiretti, cioe' mediante proprieta' che permetteranno di ridurre al minimo gli esperimenti.

Pertanto e' importante sviluppare questi teoremi per un loro utilizzo nel calcolo.

Per completezza, siccome ora ci riferiamo alla probabilita' assiomatica come sunto di tutte le probabilita' gia' viste, dimostriamo, nel nuovo contesto, anche alcuni teoremi (probabilita' totale, probabilita' composta) che avevamo gia' visto validi per le singole probabilita'.

a) Proprieta' addittiva

Studiamo meglio la proprieta' che e' legata al terzo postulato

Consideriamo prima il caso di due eventi E_1, E_2 **incompatibili** cioe' tali che o si verifica l'uno oppure si verifica l'altro, ma non possono verificarsi entrambi $E_1 \cap E_2 = \emptyset$; allora abbiamo che:

La probabilita' che si verifichi l'evento E_1 oppure l'evento E_2 e' data dalla somma delle probabilita' dei singoli eventi:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Esempio:

Trovare la probabilita' che, estraendo una carta da un mazzo di 40, esca una figura oppure un asso

I due eventi sono incompatibili nel senso che o esce una figura oppure esce un asso e non possono uscire entrambe contemporaneamente, quindi avremo:

E_1 = uscita di una figura

E_2 = uscita di un asso

probabilita' di uscita di una figura = $P(E_1) = 12/40 = 3/10$

probabilita' di uscita di un asso = $P(E_2) = 4/40 = 1/10$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = 3/10 + 1/10 = 4/10 = 0,4 = 40\%$

Consideriamo quindi il caso che gli eventi siano **qualsiasi**; avremo che:

La probabilita' che si verifichi l'evento E_1 oppure l'evento E_2 e' data dalla somma delle probabilita' dei singoli eventi meno la probabilita' del loro verificarsi in contemporanea.

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Esempio:

Trovare la probabilita' che, estraendo una carta da un mazzo di 40, esca una figura oppure una carta di denari

Puo' uscire una figura che non sia di denari, puo' uscire una carta di denari che non sia una figura, ma puo' anche uscire una figura di denari, quindi avremo:

E_1 = uscita di una figura

E_2 = uscita di una carta di denari

$E_1 \cap E_2$ = uscita di una figura di denari

probabilità di uscita di una figura = $P(E_1) = 12/40$

probabilità di uscita di una carta di denari = $P(E_2) = 10/40$

probabilità di uscita di una carta di denari che sia anche una figura (le figure di denari sono 3) = $P(E_1 \cap E_2) = 3/40$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 12/40 + 10/40 - 3/40 = 19/40 = 0,475 = 47,5\%$$

b) Probabilità condizionata (subordinata)

Finora abbiamo parlato di probabilità senza limitazioni, cioè di probabilità **incondizionata (o subordinata)**; però spesso si incontrano eventi che dipendono da altri eventi che si possono (o debbono) verificare precedentemente: tali eventi, naturalmente, influiranno sulla probabilità dell'evento successivo; in tal caso occorre introdurre il concetto di **probabilità condizionata**.

Definiamo **probabilità condizionata** dell'evento E_2 rispetto all'evento E_1 la probabilità che si verifichi l'evento E_2 dopo che si è verificato l'evento E_1

$$P(E_2|E_1)$$

Esempio:

Trovare la probabilità che la seconda carta estratta da un mazzo di 40 sia una figura se la prima estratta è anch'essa una figura.

In pratica l'uscita della prima figura (evento E_1) fa variare la probabilità di uscita della seconda carta (evento E_2) perché avremo 11 casi favorevoli su 39 casi possibili:

$$P(E_2|E_1) = 11/39$$

Per calcolare la probabilità condizionata possiamo usare la formula:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Vale una formula equivalente per la probabilità condizionata dell'evento E_1 rispetto all'evento E_2 .

Poiché vale $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1$ allora è valida anche la formula:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_2)}$$

Esempio:

Trovare la probabilità che, nel lancio di un dado, sapendo che il risultato sarà un numero dispari, si ottenga il numero 1.

$E_2|E_1$ = uscita del numero 1 sapendo che esce un numero dispari

E_1 = uscita di un numero dispari

E_2 = uscita del numero uno

$E_1 \cap E_2$ uscita del numero 1 e dispari (essendo 1 dispari equivale all'evento uscita del numero 1)

probabilità di uscita di un numero dispari = $P(E_1) = 3/6 = 1/2$

probabilità di uscita del numero 1 e dispari = $P(E_1 \cap E_2) = 1/6$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3 = 0,333... \sim 33\%$$

c) Proprietà moltiplicativa

Il concetto di probabilità condizionata nella trattazione assiomatica equivale al teorema della probabilità composta visto nella probabilità classica: infatti facendo il minimo comune multiplo nella formula della probabilità condizionata ottengo il teorema della probabilità composta

Attenzione: e' il teorema della probabilita' composta nella teoria classica, qui e' meglio chiamarlo proprieta' moltiplicativa

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = P(E_2) \cdot P(E_1|E_2)$ Ecco i passaggi:

Notare che la formula e' valida solamente se $P(E_1) \neq 0$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} =$$

Minimo comune multiplo $P(E_1)$:

$$\frac{P(E_2|E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Tolgo i denominatori

$$P(E_2|E_1) \cdot P(E_1) = P(E_1 \cap E_2)$$

Leggo a rovescio:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$$

Ma posso farlo anche per la seconda formula: $(P(E_2) \neq 0)$

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} =$$

Minimo comune multiplo $P(E_2)$:

$$\frac{P(E_1|E_2) \cdot P(E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Tolgo i denominatori:

$$P(E_1|E_2) \cdot P(E_2) = P(E_1 \cap E_2)$$

Leggo a rovescio:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1|E_2)$$

Raccogliendo posso scrivere:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1|E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$$

Cioe': la probabilita' del prodotto di due eventi e' uguale al prodotto fra la probabilita' del primo e la probabilita' del secondo condizionata al fatto che il primo evento sia accaduto

Esempio:

Trovare la probabilita' che estraendo due carte da un mazzo di 40 siano entrambe assi:

E_1 = uscita di un asso

$E_2|E_1$ = uscita di un secondo asso

probabilita' di uscita di un asso = $P(E_1) = 4/40 = 1/10$

probabilita' condizionata di uscita di un secondo asso = $P(E_2|E_1) = 3/39 = 1/13$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = 1/10 \cdot 1/13 = 1/130 = 0,0076 \sim 0,8\%$$

d) Eventi indipendenti

E' ora fondamentale introdurre il concetto di **eventi indipendenti**.

Definizione:

Si dice che l'evento E_1 e' indipendente dall'evento E_2 se il fatto che si verifichi E_2 non altera le probabilita' dell'evento E_1 :

$$P(E_1) = P(E_1|E_2)$$

Esempio di eventi indipendenti:

Trovare la probabilita' che estraendo una carta da un mazzo di 40 essa sia un asso oppure una figura gli eventi:

E_1 uscita di un asso
 E_2 uscita di una figura
 sono tra loro indipendenti.

Esempio di eventi dipendenti:

Trovare la probabilita' che estraendo due carte da un mazzo di 40 (senza rimettere la carta estratta nel mazzo) la prima sia un asso e la seconda sia una figura.

Gli eventi:

E_1 uscita di un asso

E_2 uscita di una figura

sono tra loro dipendenti perche' il primo evento fa variare la probabilita' del secondo evento: i casi possibili per la seconda estrazione non sono piu' 40 ma 39.

Vediamo alcune proprieta' importanti degli eventi indipendenti che derivano dalla definizione:

1. **Se E_1 e' indipendente da E_2 allora anche E_2 e' indipendente da E_1**
 Cioe' la proprieta' di indipendenza di eventi e' reciproca

Dalla formula per la probabilita' composta:

$$P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \cap E_1) = P(E_2) \cdot P(E_1|E_2)$$

guardando il primo e l'ultimo termine, essendo per ipotesi $P(E_1) = P(E_1|E_2)$ ne segue:

$$P(E_2|E_1) = P(E_2)$$

Come volevamo

2. **Se gli eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti allora sono indipendenti anche le coppie di eventi:**

$$E_1, \overline{E_2}$$

$$\overline{E_1}, E_2$$

$$\overline{E_1}, \overline{E_2}$$

sono indipendenti.

Dimostriamo l'indipendenza della prima coppia:

so che $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ devo dimostrare che $P(\overline{E_2}|E_1) = P(\overline{E_2})$

so che, essendo complementari gli eventi E_2 e $\overline{E_2}$,

$$P(E_2|E_1) + P(\overline{E_2}|E_1) = 1$$

Per ipotesi $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ quindi

$$\overline{P}(E_2|E_1) = 1 - P(E_2) = P(\overline{E_2})$$

Come volevamo.

Qualche testo usa, in modo equivalente, il termine di *indipendenza stocastica*.

e) Probabilita' totale

Siano gli eventi E_1 ed E_2 due eventi tra loro mutualmente incompatibili, nel senso che puo' succedere uno solo dei due, e sia E un evento che puo' accadere solamente associato ad uno

dei due precedenti; allora vale la relazione (teorema della probabilita' totale):

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2)$$

Naturalmente possiamo generalizzare al caso di n eventi tra loro mutualmente indipendenti:

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2) + P(E_3) \cdot P(E|E_3) + \dots + P(E_n) \cdot P(E|E_n)$$

Dimostrazione:

So che gli eventi E_1 e E_2 sono tra loro incompatibili e che l'evento E puo' avvenire solo associato ai due eventi precedenti, cioe', con la simbologia della teoria degli insiemi:

$$E = (E \cap E_1) \cup (E \cap E_2)$$

Per la proprieta' additiva fra eventi incompatibili:

$$P(E) = P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2)$$

e per la proprieta' moltiplicativa:

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2)$$

Come volevamo.

Esempio:

Abbiamo due urne:

la prima contiene 6 palline bianche e 8 nere

la seconda contiene 8 palline bianche e 4 nere.

Trovare la probabilita' che, estraendo a caso una pallina da una delle due urne, la pallina estratta sia nera:

E uscita di una pallina nera

E_1 uscita della pallina dalla prima urna

E_2 uscita della pallina dalla seconda urna

Dalla formula abbiamo:

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2)$$

$P(E_1) = 1/2$ probabilita' di estrarre dalla prima urna

$P(E_2) = 1/2$ probabilita' di estrarre dalla seconda urna

$P(E|E_1) = 8/14 = 4/7$ probabilita' di estrarre una pallina nera dalla prima urna

$P(E|E_2) = 4/12 = 1/3$ probabilita' di estrarre una pallina nera dalla seconda urna

Quindi ottengo

$$P(E) = 1/2 \cdot 4/7 + 1/2 \cdot 1/3 = 2/7 + 1/6 = 19/42 = 0,4523.. \sim 45,2\%$$

f) Formula di Bayes (teorema delle probabilita' delle cause)

La formula di Bayes e' detta anche *teorema di Bayes in forma elementare*.

Siano E_1 ed E_2 2 eventi qualsiasi abbiamo visto (*proprieta' moltiplicativa*) che vale

$$P(E_2) \cdot P(E_1|E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$$

che posso anche scrivere come:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2)}$$

Questa e' la cosiddetta formula di Bayes (o anche teorema di Bayes in forma elementare)

Questa formula si puo' estendere ad un evento E riferito a piu' eventi tra loro indipendenti (teorema di Bayes).

Dato l'evento E e gli eventi:

$E_1, E_2, E_3 \dots E_n$

che siano tra loro indipendenti ($E_j \cap E_k = \emptyset$ per $j, k=1, 2, 3, \dots, n$ con $j \neq k$)

Allora vale la relazione:

$$P(E_j|E) = P(E_j) \cdot \frac{P(E|E_j)}{\sum_{k=1}^{k=n} P(E_k) \cdot P(E|E_k)}$$

Esercizio:

Una fabbrica acquista dei pezzi lavorati presso 3 aziende **A**, **B** e **C** nelle percentuali del 20%, 30% e 50% rispettivamente; sapendo che la percentuale di pezzi difettosi e':

azienda **A** = 3% di pezzi difettosi

azienda **B** = 4% di pezzi difettosi

azienda **C** = 2% di pezzi difettosi

1) **Calcolare la probabilita' che, trovando un pezzo difettoso, esso provenga dall'azienda A:**

Evento **E** il pezzo e' difettoso

Evento **E₁** il pezzo proviene dall'azienda **A**

Evento **E₂** il pezzo proviene dall'azienda **B**

Evento **E₃** il pezzo proviene dall'azienda **C**

Applichiamo la formula di Bayes

$$P(E_1|E) = P(E_1) \cdot \frac{P(E|E_1)}{P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2) + P(E_3) \cdot P(E|E_3)}$$

$P(E_1) = 20/100 = 1/5$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **A**

$P(E_2) = 30/100 = 3/10$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **B**

$P(E_3) = 50/100 = 1/2$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **C**

$P(E|E_1) = 3/100$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda **A** sia difettoso

$P(E|E_2) = 4/100 = 1/25$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda **B** sia difettoso

$P(E|E_3) = 2/100 = 1/50$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda **C** sia difettoso

$P(E_1|E)$ = probabilita' che il pezzo difettoso provenga dall'azienda **A**:

$$P(E_1|E) = 1/5 \cdot \frac{3/100}{1/5 \cdot 3/100 + 3/10 \cdot 1/25 + 1/2 \cdot 1/50}$$

$$= \frac{3/500}{3/500 + 3/250 + 1/100} = \frac{3/500}{14/500} = 3/500 \cdot 500/14 = 3/14 = 0,214... \sim 21\%$$

La probabilita' che il pezzo difettoso provenga dall'azienda **A** e' del 21%

Per completare:

2) **Calcolare la probabilita' che il pezzo difettoso provenga dall'azienda B** Soluzione:

Anche qui applico la formula di Bayes:

$$P(E_2|E) = P(E_2) \cdot \frac{P(E|E_2)}{P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2) + P(E_3) \cdot P(E|E_3)}$$

$P(E_1) = 20/100 = 1/5$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **A**

$P(E_2) = 30/100 = 3/10$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **B**

$P(E_3) = 50/100 = 1/2$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **C**

$P(E|E_1) = 3/100$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda **A** sia difettoso

$P(E|E_2) = 4/100 = 1/25$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda **B** sia difettoso

$P(E|E_3) = 2/100 = 1/50$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda **C** sia difettoso

$P(E_2|E)$ = probabilita' che il pezzo difettoso provenga dall'azienda **B**

$$P(E_2|E) = 3/10 \cdot \frac{1/25}{1/5 \cdot 3/100 + 3/10 \cdot 1/25 + 1/2 \cdot 1/50} =$$

$$= \frac{3/250}{3/500 + 3/250 + 1/100} = \frac{3/250}{14/500} = 3/250 \cdot 500/14 = 6/14 = 0,428... \sim 43\%$$

La probabilita' che il pezzo difettoso provenga dall'azienda **B** e' del 43%

Da notare che il denominatore resta sempre uguale nei calcoli per le varie aziende, cosa che rende molto piu' semplici i calcoli

3) **Calcolare la probabilita' che il pezzo difettoso provenga dall'azienda C** Soluzione:

Anche qui applico la formula di Bayes:

$$P(E_3|E) = P(E_3) \cdot \frac{P(E|E_3)}{P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2) + P(E_3) \cdot P(E|E_3)}$$

$P(E_1) = 20/100 = 1/5$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **A**

$P(E_2) = 30/100 = 3/10$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **B**

$P(E_3) = 50/100 = 1/2$ probabilita' che il pezzo provenga dall'azienda **C**

$P(E|E_1) = 3/100$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda **A** sia difettoso

$P(E|E_2) = 4/100 = 1/25$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda **B** sia difettoso

$P(E|E_3) = 2/100 = 1/50$ probabilita' che il pezzo proveniente dall'azienda C sia difettoso

$P(E_2|E) =$ probabilita' che il pezzo difettoso provenga dall'azienda C

$$P(E_3|E) = \frac{1/2 \cdot \frac{1/50}{1/5 \cdot 3/100 + 3/10 \cdot 1/25 + 1/2 \cdot 1/50}}{1/100} = \frac{1/100}{3/500 + 3/250 + 1/100} = \frac{1/100}{14/500} = 1/100 \cdot 500/14 = 5/14 = 0,357... \sim 36\%$$

La probabilita' che il pezzo difettoso provenga dall'azienda C e' del 36%

Da notare che il denominatore resta sempre uguale nei calcoli per le varie aziende, cosa che rende molto piu' semplici i calcoli

D. Teoria dei giochi

Come applicazione del calcolo della probabilita' vediamo ora un cenno sulla teoria dei giochi; questa parte e' importante soprattutto nei tecnici commerciali e nelle scuole ad indirizzo commerciale perche' tutte le assicurazioni sono strutturate come un gigantesco gioco in cui si vince il premio dell'assicurazione al verificarsi di dati eventi: tratteremo l'argomento in matematica finanziaria.

1. Giochi di sorte

Parliamo ora dei giochi di sorte, cioe' di giochi in cui la vincita dipende solamente da un evento casuale che puo' verificarsi (caso di vincita), oppure puo' non verificarsi (caso di perdita).

Alla vincita od alla perdita al gioco e' legata l'acquisizione o la perdita di una determinata somma.

Esempi:

1) **Lancio una moneta: se esce testa vinco 1 euro, se esce croce perdo 1 euro**

Questo e' un gioco di sorte: la vincita oppure la perdita dipende dall'evento "uscita di testa".

2) **Estraggo una carta da un mazzo di 40: se esce un asso vinco 5 euro, se esce una figura vinco 1 euro**

Questo e' un gioco di sorte: la vincita oppure la perdita dipende dall'evento "uscita di un asso" oppure "uscita di una figura".

Da notare che mentre il primo gioco e' "equilibrato" nel senso che posso sia vincere che perdere il secondo e' "squilibrato", perche' posso solamente vincere; naturalmente giochi del genere del secondo hanno solo un significato "didattico".

3) Se faccio un gioco tipo briscola, tresette, scopa, scala 40,... questi non sono giochi di sorte perche', anche se conta il fatto di avere buone carte in mano, compare anche la bravura del giocatore che difficilmente e' quantificabile, quindi tali giochi non li prenderemo in considerazione.

2. Speranza matematica

Consideriamo ora il concetto fondamentale base della teoria dei giochi: la speranza matematica.

Definizione:

La speranza matematica e' il prodotto fra la somma da vincere e la probabilita' di vincerla per indicarla useremo il simbolo:

$$\text{Speranza matematica} = Sp$$

essendo S la somma da vincere e p la probabilita' di vincerla.

Concettualmente la **speranza matematica** e' il valore che vincerei (o perderei) in media in ogni puntata se il gioco continuasse indefinitamente.

Esempi: (vediamo di capire meglio il concetto cominciando dagli esempi della pagina precedente)

1) Lancio una moneta: se esce testa vinco 1 euro, se esce croce perdo 1 euro

- Speranza matematica per "uscita di testa":
Somma da vincere 1€
Probabilita' di uscita di testa = $1/2$
Speranza matematica = $S_1p_1 = 1€ \cdot 1/2 = 0,5€$
- Speranza matematica per "uscita di croce":
Somma da vincere -1€ (negativo perche' lo perdo)
Probabilita' di uscita di croce = $1/2$
Speranza matematica = $S_2p_2 = -1€ \cdot 1/2 = -0,5€$
- **Speranza matematica totale = $S_1p_1 + S_2p_2 = +0,5€ - 0,5€ = 0$**
La speranza matematica del gioco e' nulla: cioe' se giocassi all'infinito dovrei aspettarmi di vincere in media 0 euro per ogni puntata.
Ho messo gli indici ad S perche' vi sono giochi in cui e' diversa la somma che si puo' vincere o perdere

2) Estraggo una carta da un mazzo di 40: se esce un asso vinco 5 euro, se esce una figura vinco 1 euro

- Speranza matematica per "uscita di un asso":
Somma da vincere 5€
Probabilita' di uscita di un asso = $4/40 = 1/10$
Speranza matematica = $S_1p_1 = 5€ \cdot 1/10 = 0,5€$
- Speranza matematica per "uscita di una figura":
Somma da vincere 1€
Probabilita' di uscita di croce = $12/40 = 3/10$
Speranza matematica = $S_2p_2 = 1€ \cdot 3/10 \sim 0,33€$
- **Speranza matematica totale = $S_1p_1 + S_2p_2 \sim +0,5€ + 0,33€ \sim 0,83€$**
La speranza matematica del gioco e' 0,83 euro circa: cioe' cioe' se giocassi all'infinito dovrei aspettarmi di vincere in media 0,83 euro per ogni giocata evidentemente e' un gioco sbilanciato, nel senso che posso solo vincere e non perdere

3) Gioco 1 euro al superenalotto: posso vincere 100.000.000 (cento milioni) di euro se indovino i sei numeri.

Calcolo la mia speranza matematica del gioco

- Speranza matematica per "uscita di 6 numeri":
Somma da vincere 100000000€
Probabilita' di uscita di 6 numeri in ordine = $1/90 \cdot 1/89 \cdot 1/88 \cdot 1/87 \cdot 1/86 \cdot 1/85 = 1/448.282.533.600$
Pero' i miei numeri possono uscire in qualunque modo; se esce il numero 5 puo' uscire sia al primo che al terzo posto, per me e' indifferente, quindi devo considerare le possibili sestine cioe' **le permutazioni semplici** su 6 oggetti:
permutazioni su 6 oggetti $p_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Probabilita' di uscita di 6 numeri in ordine qualunque = $720/448.282.533.600 = 0,000000002$ circa 2 possibilita' su un miliardo!
- **Speranza matematica = $S_1p_1 = 100000000€ \cdot 0,000000002 = +0,20€$**
- Speranza matematica per "non uscita di tutti e sei i numeri":
Somma da vincere - 1€ (negativo perche' lo perdo)
Probabilita' di non uscita di tutti e sei i numeri = probabilita' contraria = $1 - 0,000000002 = 0,999999998$
- **Speranza matematica = $S_2p_2 = -1€ \cdot 0,999999998 = -0,999999998€$**
- **Speranza matematica totale = $S_1p_1 + S_2p_2 \sim +0,20€ - 0,999999998€ \sim -0,80€$**
La speranza matematica del gioco e' -0,80 euro circa: cioe' se giocassi 1 euro all'infinito, tra vincite e perdite, dovrei aspettarmi di perdere in media 0,80 euro per ogni giocata, cioe' per vincere una volta cento milioni dovrei in media giocare cinquecento milioni in puntate in cui perdo (puntando un euro per volta).

Capito perché non giochi al superenalotto? Lo stato prende tutte le giocate, ne restituisce come premio il 20% al vincitore e ne incamera l'80% (mia speranza matematica). È giusto dire che il gioco gestito dallo stato è il sistema di far pagare le tasse a chi non sa la matematica.

3. Gioco equo

Abbiamo visto alcuni giochi in cui il gioco è equilibrato, cioè posso vincere o perdere (lancio di una moneta), e, invece, giochi in cui la tendenza è perdere (enalotto); questo ci porta a parlare di gioco equo, cioè un gioco in cui ci si confronti alla pari, con le stesse possibilità (non probabilità) di vincita e di perdita.

Definizione:

Diremo che un gioco è equo se la speranza matematica totale vale zero

$$Sp = S_1p_1 + S_2p_2 + S_3p_3 + \dots + S_n p_n = 0$$

Riprendiamo l'esempio già visto:

1) Lancio una moneta: se esce testa vinco 1 euro, se esce croce perdo 1 euro

- Speranza matematica per "uscita di testa":
Somma da vincere 1€
Probabilità di uscita di testa = 1/2
Speranza matematica "esce testa" = $S_1p_1 = 1€ \cdot 1/2 = 0,5€$
- Speranza matematica "uscita di croce":
Somma da vincere -1€ (negativo perché lo perdo)
Probabilità di uscita di croce = 1/2
Speranza matematica "esce croce" = $S_2p_2 = -1€ \cdot 1/2 = -0,5€$
- **Speranza matematica totale = $S_1p_1 + S_2p_2 = +0,5€ - 0,5€ = 0$**

Essendo la speranza matematica totale uguale a zero il gioco è equo

Distinguiamo comunque i due casi:

- Gioco equo con probabilità certe
- Gioco equo con probabilità soggettive

a) Gioco equo con probabilità certe

Nel gioco con probabilità certe è possibile usare in modo esatto gli strumenti matematici possibili per determinarne probabilità di vincita e di perdita, equità del gioco, eccetera. È anche possibile pensare di costruire dei giochi complessi in cui le speranze matematiche dei singoli giocatori siano esattamente equilibrate.

Esempi:

Estraggo una carta da un mazzo di 40: punto 1 euro per giocare; se esce un asso vinco 8 euro

Calcoliamo la speranza matematica del gioco relativamente al giocatore

- Speranza matematica per "uscita di un asso":
Somma da vincere 8€
Probabilità di uscita di un asso = 4/40 = 1/10
Speranza matematica = $S_1p_1 = 8€ \cdot 1/10 = 0,8€$
- Speranza matematica per "punto 1 euro ogni volta":
Somma da vincere -1€ (negativo perché lo perdo sempre)
Probabilità di giocare = 1 (è certo che ogni volta pago la posta per giocare)
Speranza matematica = $S_2p_2 = -1€ \cdot 1 = -1€$
- **Speranza matematica totale = $S_1p_1 + S_2p_2 \sim +0,8€ - 1€ = -0,2€$**

La speranza matematica del gioco è -0,20 euro circa: cioè se giocassi un euro per volta all'infinito dovrei aspettarmi di perdere in media 20 centesimi di euro per ogni giocata fatta.

Detto in altro modo: il banco prende il mio euro e, in media, me ne restituisce l'80% e ne incamera il 20%

Nel gioco precedente calcoliamo quanto dovrei guadagnare quando esce l'asso perche' il gioco sia equo. Perche' il gioco sia equo la speranza matematica deve essere zero:

$$S_1 p_1 + S_2 p_2 = 0$$

Ho:

$$p_1 = \text{probabilita' di uscita di un asso} = 1/10$$

$$S_2 \text{ somma da puntare ogni volta} = -1\text{€}$$

$$p_2 = \text{probabilita' di giocare la partita (evento certo)} = 1$$

$$S_1 = \text{incognita da determinare perche' il gioco sia equo}$$

$$S_1 \cdot 1/10 - 1\text{€} \cdot 1 = 0$$

$$1/10 S_1 = 1\text{€}$$

$$S_1 = 10 \cdot 1\text{€}$$

$$S_1 = 10 \text{ €}$$

quindi perche' il gioco sia equo dovrei riscuotere 10 euro ogni volta che viene estratto l'asso.

b) Gioco equo con probabilita' soggettive

Nel gioco con probabilita' soggettive non e' possibile usare in modo esatto gli strumenti matematici possibili per determinarne probabilita' di vincita e di perdita, equita' del gioco, eccetera.

Un uso efficace di tali strumenti dipende sia dalle conoscenze pregresse sull'argomento che dall'intuito e dall'intelligenza dell'operatore che imposta il gioco.

Esempio:

In una corsa ippica il cavallo "Bertrando" e' dato "Vincente" con probabilita' p=30%.

Gli allibratori, a fronte di una giocata di 10 €, pagano una vincita di 30 € (cavallo dato 3 a 1)

Calcoliamo la speranza matematica del gioco relativamente ad un allibratore

- Speranza matematica:
Somma da pagare - 30€ (dal punto di vista dell'allibratore la somma e' da pagare)
Probabilita' di vincita del cavallo $p_1 = 30/100 = 0,3$
Speranza matematica = $S_1 p_1 = -30\text{€} \cdot 0,3 = -9\text{€}$
- Speranza matematica per "giocata di 10€":
Somma da pagare + 10€ (positiva per l'allibratore)
Probabilita' di puntare = 1 (e' certo che ogni volta punto per giocare)
Speranza matematica = $S_2 p_2 = 10\text{€} \cdot 1 = 10 \text{ €}$
- **Speranza matematica totale = $S_1 p_1 + S_2 p_2 = -9\text{€} + 10\text{€} = +1 \text{ €}$**

La speranza matematica del gioco e' + 1 euro

Sembra poco. ma con un giro di puntate di 20.000 euro si tradurrebbero in 2.000 euro, cioe' all'allibratore va il 10% delle somme giocate

Nel gioco precedente, se l'allibratore sapesse (da un'informazione riservata) che il fantino abituale del cavallo si e' preso l'influenza e, pur partecipando alla corsa, non sara' nella forma migliore, potrebbe pensare che le probabilita' di vincita del cavallo scendano al 20%, e quindi calcoliamo quanto deve pagare l'allibratore, in caso di vincita del cavallo per guadagnare in media 1,50 euro, offrendo una vincita comunque superiore rispetto agli altri allibratori.

Perche' il gioco abbia speranza matematica +1,50 euro dovra' essere:

$$S_1 p_1 + S_2 p_2 = +1,50\text{€}$$

Ho:

$$p_1 = \text{probabilita' di vincita del cavallo} = 20\% = 0,2$$

$$S_1 \text{ somma che l'allibratore paga: da determinare}$$

$$p_2 = \text{probabilita' di puntare (evento certo)} = 1$$

$$S_2 = \text{somma da puntare} = 10\text{€}$$

$$S_1 \cdot 0,2 + 10\text{€} \cdot 1 = 1,50\text{€}$$

$$1/5 S_1 + 10\text{€} = 1,50\text{€}$$

$$1/5 S_1 = 1,50\text{€} - 10\text{€}$$

$$1/5 S_1 = -8,50\text{€}$$

$$S_1 = -8,50\text{€} \cdot 5$$

$$S_1 = -42,50\text{€}$$

Quindi l'allibratore potrebbe offrire il cavallo 4,25 a 1 e, naturalmente, raccoglierebbe un maggior numero di scommesse rispetto agli altri allibratori che offrono il cavallo 3 a 1

Supponiamo che l'allibratore, per avere cifre tonde, offra il cavallo a 4 a 1; calcoliamo la sua speranza matematica.

- Speranza matematica:
Somma da pagare - 40€ (dal punto di vista dell'allibratore la somma e' da pagare)
Probabilita' di vincita del cavallo $p_1 = 20/100 = 0,2$
Speranza matematica = $S_1p_1 = -40€ \cdot 0,2 = -8€$
- Speranza matematica per "giocata di 10€":
Somma da pagare + 10€ (positiva per l'allibratore)
Probabilita' di puntare = 1 (e' certo che ogni volta punto per giocare)
Speranza matematica = $S_2p_2 = 10€ \cdot 1 = 10€$
- **Speranza matematica totale = $S_1p_1 + S_2p_2 = -8€ + 10€ = + 2€$**

Quindi l'allibratore, offrendo il cavallo 4 a 1, pensa di avere una speranza matematica di 2 euro cioe' il suo guadagno passa al 20% delle somme giocate.

A parte l'esempio, forse non proprio ortodosso, spero di sverti mostrato qual'e' l'importanza, per una corretta applicazione della probabilita' soggettiva, di avere il maggior numero possibile di informazioni.

4. Il gioco organizzato

Quando si organizza un gioco occorre partire dall'impostare il gioco equo e, successivamente, variare le probabilita' di vincita per ritagliare una percentuale di guadagno per l'organizzatore, ricordando che, per avere una vincita molto probabile, bisogna aumentare il numero di partite giocate.

Vediamo un esempio classico.

Nel gioco della Roulette puoi puntare i numeri da 1 a 36, e, se esce il numero puntato, ritiri la tua puntata e 35 volte la posta giocata. Messo cosi' il gioco e' equo: vinco una volta ogni 36 e ricevo 36 volte la posta giocata (35 volte piu' la mia puntata). Allora per introdurre un guadagno per la casa da gioco viene introdotto il numero zero; in questo modo vinco una volta ogni 37 e ricevo 36 volte la posta giocata; in media la casa da gioco ha un guadagno pari ad $1/37$ delle somme giocate.

Alcune case da gioco giudicano insufficiente una tale vincita e quindi introducono anche il doppio zero, in tal caso il guadagno della casa da gioco e' di $2/38 = 1/19$ delle somme giocate.

Un esempio di gioco costruito a tavolino e' appunto il Superenalotto: gioco in cui le probabilita' di vincere sono **talmente minuscole** (*Scheda n. D1*) da far lievitare il premio fino a **somme superiori** ai 100.000.000 (cento milioni) di euro.

Una volta c'era una legge per cui lo stato, gestendo un gioco, poteva ritirare al massimo il 65% della somma giocata restituendo con le vincite il restante 35% (la mia memoria non mi permette di giurare su tali percentuali).

Spero che tale legge sia ancora valida, ma non ci giurerei, viste le probabilita' del superenalotto.

C'e' anche da dire che nel superenalotto le possibilita' di vincita sono talmente esigue che, facendo un 5+1, lo stato restituirebbe solamente il 20%; allora, forse, le somme restanti vengono restituite ponendo una vincita anche per quaterne e cinque ed introducendo numeri jolly.

Scheda n. D1: Probabilità di vincita

In effetti le probabilita' di vincita per il superenalotto sono (l'abbiamo gia' visto ma lo ripeto)

probabilita' di uscita di 6 numeri in ordine =

$$= 1/90 \cdot 1/89 \cdot 1/88 \cdot 1/87 \cdot 1/86 \cdot 1/85 = 1/448.282.533.600$$

Pero' i numeri possono uscire in qualunque modo: se esce il numero 5 puo' uscire sia al primo che al terzo posto, e' indifferente, quindi devo considerare le possibili sestine cioe' **le permutazioni semplici** su 6 oggetti

permutazioni su 6 oggetti $p_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Probabilità di uscita di 6 numeri in ordine qualunque = $720/448.282.533.600 = 0,000000002$

cioè possono uscire due volte su un miliardo, cioè una volta su 500 milioni di volte.

Quindi se 50 milioni di cittadini italiani giocassero una scheda di una combinazione al superenalotto ogni settimana dovremmo aspettarci, in media, una vincita ogni 10 settimane.

Più cittadini lo stato invogliera a giocare e più spesso ci saranno vincite e, naturalmente, maggiori saranno i guadagni per lo stato.

Proviamo come esercizio a costruire un semplice gioco organizzato.

Prendiamo il gioco:

estrarre una carta da un mazzo di 40

Partiamo dal gioco equo.

Supponiamo di pagare una somma per l'evento "uscita di un asso" ed un'altra somma per l'evento "uscita di una carta di denari".

Siccome esiste l'asso di denari consideriamo allora tre eventi:

E_1 uscita dell'asso di denari

E_2 uscita di un asso diverso dall'asso di denari

E_3 uscita di una carta di denari diversa dall'asso

La somma da giocare sia sempre 1 euro e la posta non venga restituita in caso di vincita.

Le probabilità sono:

$p_1 = \text{probabilità di uscita dell'asso di denari} = 1/40$

$p_2 = \text{probabilità di uscita di asso non di denari} = 3/40$

$p_3 = \text{probabilità di uscita di carta di denari non asso} = 9/40$

Per invogliare al gioco poniamo un premio più grosso sull'evento più difficile; ad esempio:

$S_1 = 22 \text{ € se esce l'asso di denari}$

$S_2 = 3 \text{ € se esce l'asso non di denari}$

$S_3 = 1 \text{ € restituisco la posta se esce un denari diverso dall'asso}$

In queste condizioni il gioco è equo, infatti la speranza matematica di chi tiene il banco è:

$S_4 = 1 \text{ € la puntata}$

$p_4 = \text{probabilità di riscuotere la puntata (evento certo)} = 1$

$S_4 p_4 = 1 \text{ €}$

e facendo la somma di tutte le speranze matematiche (considerandole relativamente al banco):

$S_1 p_1 + S_2 p_2 + S_3 p_3 + S_4 p_4 =$

$= -22 \text{ €} \cdot 1/40 - 3 \text{ €} \cdot 3/40 - 1 \text{ €} \cdot 9/40 + 1 \text{ €} \cdot 40/40 = -22/40 \text{ €} - 9/40 \text{ €} - 9/40 \text{ €} + 1 \text{ €} =$

$= -40/40 \text{ €} + 1 \text{ €} = -1 \text{ €} + 1 \text{ €} = 0$

Ora devo decidere quanto voglio guadagnare in media ogni 40 giocate:

Così com'è il gioco ogni 40 giocate

- esce una volta l'asso di denari
- escono tre volte gli altri assi
- escono 9 volte carte non di denari diverse dall'asso
- 27 volte escono altre carte

Posso intervenire in vari modi:

- Potrei intervenire sulla vincita principale, ma forse non mi conviene perché è quella che attira i giocatori, anche se una vincita di 20 euro, invece di 22, è sempre buona e la cifra tonda fa più impressione
- Nemmeno mi conviene intervenire nella vincita minore perché è quella che, visto il maggior numero di uscite, dà l'impressione di **vincere facilmente**
- mi conviene intervenire sulla vincita per "uscita di un asso non di denari" portandola da 3€ a 2€ in questo modo la mia speranza matematica non è più nulla ma sale a 3/40, cioè ogni 40 partite io guadagnerò in media 3 euro

$S_1 p_1 + S_2 p_2 + S_3 p_3 + S_4 p_4 =$

$= -22 \text{ €} \cdot 1/40 - 2 \text{ €} \cdot 3/40 - 1 \text{ €} \cdot 9/40 + 1 \text{ €} \cdot 40/40 = -22/40 \text{ €} - 6/40 \text{ €} - 9/40 \text{ €} + 1 \text{ €} =$

$= -37/40 \text{ €} + 1 \text{ €} = + 3/40 \text{ €}$

Per uso didattico trasformiamo il gioco in questo modo:

Estraggo una carta da un mazzo di 40, e la pongo coperta sul tavolo:

Pongo 1 euro sulla carta:

Se la carta è l'asso di denari ricevo 21 euro più la mia posta

Se la carta e' un asso diverso da quello di denari ricevo 1 euro piu' la mia posta
 Se la carta e' una figura di denari posso ritirare la mia posta
 Se la carta e' diversa dalle precedenti perdo 1 euro
 Evidentemente e' lo stesso gioco, solo che la posta non viene pagata prima del gioco, ma messa sulla carta in gioco.
 Infatti la speranza matematica, riferita al giocatore, e':

$$Sp = 21 \cdot \frac{1}{40} + 1 \cdot \frac{3}{40} + 0 \cdot \frac{9}{40} - 1 \cdot \frac{27}{40} = -\frac{3}{40} \text{ €}$$
 Faremo riferimento, in futuro, a questa forma del gioco

5. Teorema della rovina del giocatore

Vale il seguente teorema:

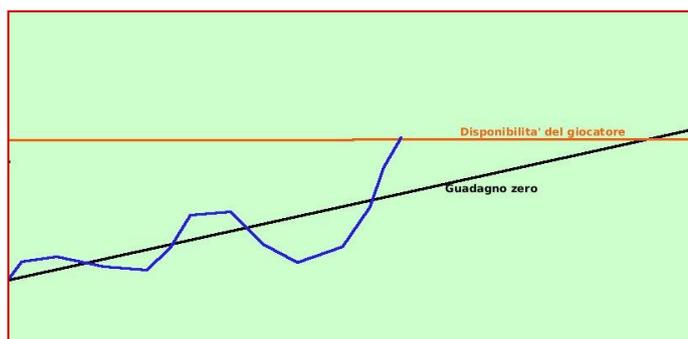
In un gioco equo contro un banco illimitato ogni giocatore e' destinato a perdere

Vediamo di capire cosa significa e perche' succede.
 Consideriamo un gioco equo, tipo ad esempio il lancio di una moneta:
 se esce testa vinciamo 1 euro, se esce croce perdiamo 1 euro.
 Sappiamo che all'aumentare delle prove fatte la frequenza si avvicina al valore della probabilita'; pero' lo scarto tra le uscite di testa e di croce aumenta comunque.



Quando il gioco si sviluppa, quindi, la linea del guadagno e delle perdite (in blu), a causa degli scarti, oscilla attorno alla linea del guadagno zero (essendo il gioco equo), ma le oscillazioni possono essere piu' o meno ampie; non appena una linea abbastanza ampia supera la disponibilita' del giocatore (in rosso), il giocatore ha perso tutto, mentre il banco, avendo possibilita' illimitate, continuera' sempre a giocare.

Ancora peggio sara' per il giocatore nel gioco organizzato in quanto il guadagno costante del banco rende la retta "guadagno zero" inclinata (l'inclinazione della retta "guadagno zero" per il giocatore sara' tanto maggiore quanto maggiore e' la percentuale di guadagno del banco).



In questo caso, come puoi vedere dal grafico, il giocatore e' destinato a perdere piu' velocemente perche' gli scarti si sviluppano attorno alla retta nera che, stavolta, e' obliqua.

Come puoi vedere l'unico sistema per non perdere sistematicamente al gioco e' giocare con un amico ed alle stesse probabilita' (gioco equo).

Se vuoi provare una volta a giocare ad un gioco organizzato allora ti conviene fare un'unica puntata e poi, comunque vada, smettere di giocare.

Se non altro limiterai le perdite.

Ricordo una volta che, entrato in un bar con un amico, costui, dopo pagate le consumazioni, chiese un gratta e vinci da 5 euro e, grattando, vinse la somma di 5 euro.

Presento' il tagliando al negoziante che, pronto, gli porse un altro gratta e vinci, ma il mio amico:

"No, grazie, preferisco i 5 euro"

Intasco' il denaro ed uscimmo dal bar.

E. Distribuzioni di probabilita'

Distinguiamo i casi in cui le variabili casuali siano discrete dal caso in cui si presentino in forma continua:

- Variabili aleatorie discrete
- Variabili aleatorie continue

1. Variabili aleatorie discrete

Parleremo di variabili aleatorie discrete quando l'insieme dei valori possibili sara' finito, cioe' avremo un numero finito di probabilita' e quindi di eventi diversi.

Esempio: nel lancio di una moneta ho due probabilita' relative a due eventi diversi:

testa con $p_1 = 1/2$

croce con $p_2 = 1/2$

quindi il lancio di una moneta ha un numero discreto (2) di probabilita'.

a) Variabile aleatoria (casuale)

Definizione:

La variabile aleatoria e' una variabile che puo' assumere valori diversi in corrispondenza di altrettanti eventi che costituiscono una partizione dello spazio delle probabilita'

Vediamo su un esempio gia' fatto:

estrarre una carta da un mazzo di 40

Consideriamo gli eventi:

E_1 uscita dell'asso di denari e vincita di 21 euro (1 carta)

E_2 uscita di un asso diverso dall'asso di denari e vincita di 1 euro (3 carte)

E_3 uscita di una carta di denari diversa dall'asso ne' vincita ne' perdita (9 carte)

E_4 uscita di una diversa dalle precedenti perdita di 1 euro (27 carte)

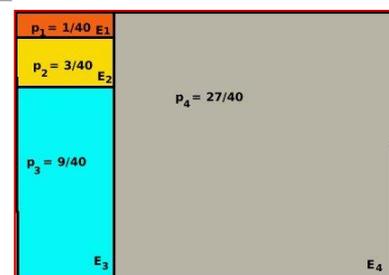
Le probabilita' sono:

$p_1 =$ probabilita' di uscita dell'asso di denari = $1/40$

$p_2 =$ probabilita' di uscita di asso non di denari = $3/40$

$p_3 =$ probabilita' di uscita di carta di denari non asso = $9/40$

$p_4 =$ probabilita' di uscita di una carta diversa dalle precedenti = $27/40$



Per calcolarla basta fare la probabilita' contraria:

$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - 1/40 - 3/40 - 9/40 = 27/40$

Nella partizione dello spazio delle probabilita' negli spazi degli eventi E_1, E_2, E_3 ed E_4 ho indicato i rispettivi valori delle probabilita' degli eventi considerati

In pratica la variabile aleatoria X e' la funzione che associa ad ogni evento di una partizione un numero reale legato alla probabilita' dell'evento.

Nell'esempio sopra indicato abbiamo che i valori della variabile aleatoria X sono i premi pagati legati alle loro probabilita':

$$X(E_1) = 21 \text{ € con } p_1 = 1/40$$

$$X(E_2) = 1 \text{ € con } p_2 = 3/40$$

$$X(E_3) = 0 \text{ € con } p_3 = 9/40$$

$$X(E_4) = -1 \text{ € con } p_4 = 27/40$$

Da notare che lavoriamo su una partizione dello spazio degli eventi e quindi la somma di tutte le probabilita' deve sempre dare come risultato 1:

$$1/40 + 3/40 + 9/40 + 27/40 = 40/40 = 1$$

D'ora in avanti chiamiamo la variabile aleatoria X e gli argomenti X_i invece di $X(E_i)$ per semplicita'.

Possiamo utilizzare un metodo per rappresentare la variabile aleatoria (distribuzione della variabile aleatoria):

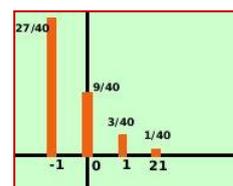
X	X_1	X_2	X_3	X_n
Pr	p_1	p_2	p_3	p_n

Nell'esempio precedente legando agli eventi il numero di carte che corrispondono all'evento avremo:

X	21	1	0	-1
Pr	1/40	3/40	9/40	27/40

Naturalmente i numeri sull'asse orizzontale della figura a destra non corrispondono ad una distanza ma solamente alla denominazione dell'evento.

E' preferibile mettere in ordine crescente il valore della somma persa o vinta: -1, 0, +1, +21 (vedi il gioco [gia' sviluppato in fondo alla pagina](#) del capitolo precedente)



Se vuoi vedere un altro esercizio, eccolo:

Trovare le variabili aleatorie per l'evento: lancio contemporaneo di due monete

Consideriamo gli eventi:

X_1 uscita di due teste

X_2 uscita di una testa ed una croce

X_3 uscita di due croci

Le probabilita' sono:

$$p_1 = \text{probabilita' di due teste} = 1/4$$

$$p_2 = \text{probabilita' di uscita di una testa ed una croce} = 2/4$$

$$p_3 = \text{probabilita' di uscita di due croci} = 1/4$$

Vedi *Scheda n. E1*

I valori della variabile aleatoria $p_x = f(E_x)$ sono:

$$f(X_1) = p_1 = 1/4$$

$$f(X_2) = p_2 = 1/2$$

$$f(X_3) = p_3 = 1/4$$

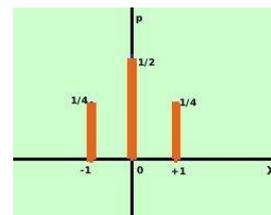
Da notare che lavoriamo su una partizione dello spazio degli eventi e quindi la somma di tutte le probabilita' deve sempre dare come risultato 1:

$$1/4 + 1/2 + 1/4 = 4/4 = 1$$

Rappresentiamo la variabile aleatoria.

Essendo un evento simmetrico, (nel senso che abbiamo stesse possibilita' per testa per croce) ci conviene rappresentare gli eventi con i numeri -1, 0, +1 ottenendo in questo modo una rappresentazione con asse verticale centrale.

X	-1	0	+1
f	1/4	1/2	1/4



Scheda n. E1

Probabilità di due teste:

In questo caso ho che deve essere:

la prima testa e la seconda testa essendo il lancio contemporaneo devo considerare assieme queste possibilita':

$p_{totale} = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

t t testa la prima e testa la seconda $p = 1/4$

Ti ricordo che

la prima e la seconda si trasforma in un prodotto (La particella e significa prodotto)

Probabilità di una testa ed una croce:

In questo caso ho che puo' essere:

t c la prima testa e la seconda croce $p = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

c t la prima croce e la seconda testa $p = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

Essendo il lancio contemporaneo per questo evento devo considerare assieme entrambe le possibilita' (o vale la prima o vale la seconda):

$p_{totale} = 1/4 + 1/4 = 1/2$

Ti ricordo che

la prima e la seconda si trasforma in un prodotto (La particella e significa prodotto)

o la prima o la seconda si trasforma in una somma (La particella o significa prodotto)

Probabilità di due croci:

In questo caso ho che deve essere:

la prima croce e la seconda croce essendo il lancio contemporaneo devo considerare assieme queste possibilita':

$p_{totale} = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

c c croce la prima e croce la seconda $p = 1/4$

Ti ricordo che

la prima e la seconda si trasforma in un prodotto (La particella e significa prodotto)

Altro esempio:

Consideriamo le probabilita' di uscita della faccia di un dado:

E₁ uscita del punteggio 1

E₂ uscita del punteggio 2

E₃ uscita del punteggio 3

E₄ uscita del punteggio 4

E₅ uscita del punteggio 5

E₆ uscita del punteggio 6

Le relative probabilita' sono:

$p_1 = \text{probabilita' di uscita del punteggio 1} = 1/6$

$p_2 = \text{probabilita' di uscita del punteggio 2} = 1/6$

$p_3 = \text{probabilita' di uscita del punteggio 3} = 1/6$

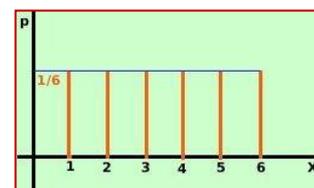
$p_4 = \text{probabilita' di uscita del punteggio 4} = 1/6$

$p_5 = \text{probabilita' di uscita del punteggio 5} = 1/6$

$p_6 = \text{probabilita' di uscita del punteggio 6} = 1/6$

possiamo usare la rappresentazione

X	1	2	3	4	5	6
f	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



b) Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione viene introdotta per aiutarci a studiare le distribuzioni di probabilita'.

Definizione:

Sia $f(X)$ una variabile aleatoria; allora si dice funzione di ripartizione F della variabile aleatoria $f(X)$ la funzione:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definita come la somma dei valori precedenti od uguali un dato valore associato ad un blocco della partizione

$$F(x) = \sum_{k \leq 1, 2, \dots, n} f(X_k)$$

In pratica devi prendere la probabilita' del primo blocco, poi la probabilita' del primo e del secondo e sommarle, poi la probabilita' del primo, del secondo e del terzo e sommarle,... e cosi' via.

Quindi la funzione di ripartizione diventa una funzione "a scalini".

Esempio:

Nel caso visto del lancio di un dado avremo che la funzione di ripartizione assume i valori:

$$F(X_1) = 1/6$$

$$F(X_2) = 1/6 + 1/6 = 2/6$$

$$F(X_3) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$$

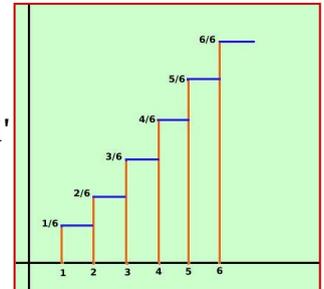
$$F(X_4) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6$$

$$F(X_5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 5/6$$

$$F(X_6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 6/6$$

Come tabella avremo:

X	1	2	3	4	5	6
Pr	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$F(X_i)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6



Vediamo su un altro esempio gia' sviluppato.

Estrarre una carta da un mazzo di 40

Eventi (ordiniamo secondo la vincita):

X_1 uscita di una diversa dalle seguenti perdita di 1 euro (27 carte)

X_2 uscita di una carta di denari diversa dall'asso vincita di 0 euro (9 carte)

X_3 uscita di un asso diverso dall'asso di denari vincita di 1 euro (3 carte)

X_4 uscita dell'asso di denari, vincita di 21 euro (1 carta)

Probabilita' :

p_1 = probabilita' di uscita di una carta diversa dalle seguenti = 27/40

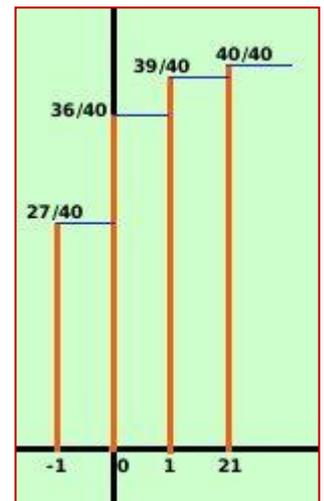
p_2 = probabilita' di uscita di carta di denari non asso = 9/40

p_3 = probabilita' di uscita di asso non di denari = 3/40

p_4 = probabilita' di uscita dell'asso di denari = 1/40

La funzione di ripartizione sara':

X	-1	0	1	21
Pr	27/40	9/40	3/40	1/40
$F(X_i)$	27/40	36/40	39/40	40/40



La funzione di ripartizione verra' usata in quei problemi in cui si chiede di calcolare valori inferiori o superiori ad un valore prefissato.

c) Valore medio di una variabile aleatoria

Talvolta i dati portati da una distribuzione di probabilita' sono sovrabbondanti, nel senso che, per le applicazioni, puo' essere sufficiente conoscere qualche valore caratteristico. Come in fisica, talvolta, per studiare il moto di un sistema e' sufficiente studiarne il moto del baricentro; il valore medio (chiamato anche speranza matematica) e' l'equivalente in teoria della probabilita' del baricentro di un sistema in fisica.

Il valore medio, in particolare, e' molto utile quando abbiamo un **elevato numero di dati** (*nota*) che siano abbastanza "raggruppati".

Nota: L'effettiva rappresentativita' del valore medio e' affidata al fatto di aver un grande numero di dati ed abbastanza raggruppati:

Se ad esempio dico che
il signor Rossi mangia 10 polli
ed il signor Bianchi 0 polli
il valore medio

$$M = (10 + 0)/2 = 5$$

non ha un grande significato.

Mentre se dicessi:

Bianchi mangia 10 polli

Rossi mangia 8 polli

Verdi mangia 12 polli

Gialli mangia 9 polli

Neri mangia 11 polli

Allora il valore medio

$$M = (10 + 8 + 12 + 9 + 11)/5 = 10$$

Effettivamente significa un reale consumo medio distribuito fra la popolazione considerata

Definizione:

Il valore medio $M(X) = m$ della variabile aleatoria X e' la somma dei prodotti di ogni valore X_i della variabile aleatoria per la rispettiva probabilita' p_i

$$m = M(X) = X_1p_1 + X_2p_2 + X_3p_3 + \dots + X_n p_n$$

Qualche libro usa il simbolo \bar{x}

Relativamente al suo significato potremmo anche usare questa definizione:

Il valore medio di una variabile aleatoria rappresenta la previsione teorica del valore che mediamente tale variabile assumerà nell'ipotesi di eseguire un numero elevato di prove.

Prendiamo il solito esempio del lancio di un dado:

X	1	2	3	4	5	6
Pr	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Avremo:

$$m = M(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 21/6 = 7/2 = 3,5$$

In pratica il valore medio si stabilisce fra i valori 3 e 4 dei dadi: cioe' se facessi un gran numero di lanci e considerassi la media di tutte le uscite troverei 3,5.

Vediamo su un altro esempio gia' sviluppato perche' il valore medio viene anche chiamato speranza matematica:

Estrarre una carta da un mazzo di 40

Eventi:

X_1 Perdo 1 euro se esce una carta diversa dalle seguenti (27 carte)

X_2 Vinco 0 (riprendo la posta) se esce una carta di denari diversa dall'asso (9 carte)

X_3 Vinco 1 euro se esce un asso diverso dall'asso di denari (sarebbero 2 ma ho pagato la posta) (3 carte)

X_4 Vinco 21 euro se esce l'asso di denari (sarebbero 22 ma ho pagato la posta) (1 carta)

Probabilita':

- p_1 = probabilita' di uscita di una carta diversa dalle precedenti = 27/40
- p_2 = probabilita' di uscita di carta di denari non asso = 9/40
- p_3 = probabilita' di uscita di asso non di denari = 3/40
- p_4 = probabilita' di uscita dell'asso di denari = 1/40

La variabile aleatoria e':

X	-1	0	1	21
Pr	27/40	9/40	3/40	1/40

Il valore medio e':

$$m = M(x) = -1 \cdot 27/40 + 0 \cdot 9/40 + 1 \cdot 3/40 + 21 \cdot 1/40 = -3/40$$

Come vedi il valore medio, in questo caso in cui abbiamo preso come X le somme da vincere (perdere), Corrisponde esattamente alla speranza matematica gia' trovata.

Guarda alla fine dell'esercizio che abbiamo gia' fatto [in fondo alla pagina](#).

d) Varianza

Per poter avere una **buona rappresentativita' del valore medio** e' necessario introdurre un indice che misuri di quanto il valore medio si discosta dai dati, cioe' la **varianza**.

Consideriamo una variabile aleatoria:

X	X_1	X_2	X_3	X_n
Pr	p_1	p_2	p_3	p_n

Se $m = M(X)$ e' il suo valore medio, esso sara' rappresentativo se si discosta poco dai valori della variabile, cioe' se gli scarti:

$$M(X) - X_k$$

Sono abbastanza piccoli, quindi dovrei fare una nuova tabella con gli scarti.

Pero', invece di considerare tutti i valori degli scarti devo cercare di concentrare il significato in un dato unico: la **varianza**, che misurera' la dispersione dei valori attorno al valore medio.

Definizione:

La **varianza** e' il **valor medio del quadrato degli scarti**, cioe' la **la somma dei quadrati degli scarti per le relative probabilita'**.

Viene indicata con i simboli **Var(X)** oppure $\sigma^2(X)$:

$$\sigma^2(X) = M(X-m)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (M(X) - X_k)^2 p_k$$

Se vuoi approfondire e vedere tutto il **ragionamento per trovare la formula**, eccolo:

Data la variabile aleatoria

X_i	X_1	X_2	X_3	X_n
f	p_1	p_2	p_3	p_n

$M(X)$ sara' una media rappresentativa se i valori della media si scostano poco da quelli della variabile, cioe' se sono abbastanza piccoli gli scarti (differenze fra la media ed i valori) :

$$M(X)-X_1, M(X)-X_2, M(X)-X_3, \dots, M(X)-X_n,$$

Pero' usare una tabella e' poco pratico: piu' utile e' concentrare i risultati in un unico numero.

Il calcolo piu' intuitivo sembra essere di farne il valore medio.

Valore medio =

$$= [M(X)-X_1] p_1 + [M(X)-X_2] p_2 + [M(X)-X_3] p_3 + \dots + [M(X)-X_n] p_n =$$

eseguo le moltiplicazioni:

$$= M(X)p_1 - X_1p_1 + M(X)p_2 - X_2p_2 + M(X)p_3 - X_3p_3 + \dots + M(X)p_n - X_np_n =$$

Raggruppo i termini positivi e negativi:

$$= M(X)p_1 + M(X)p_2 + M(X)p_3 + \dots + M(X)p_n - X_1p_1 - X_2p_2 - X_3p_3 \dots - X_np_n =$$

Tra quelli positivi raccolgo $M(X)$, fra quelli negativi raccolgo il segno meno:

$$= M(X)[p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n] - (X_1p_1 + X_2p_2 + X_3p_3 \dots + X_np_n =$$

Ora so che la somma delle probabilita' vale 1 e che la somma dopo il segno meno e' il valore medio $M(X)$, quindi ottengo:
 $= M(X) - M(X) = 0$
 quindi la scelta della media degli scarti **non va bene**.
 Allora prendiamo i **quadrati degli scarti**, perche' essendo tutti positivi, facendone la somma non otterremo un valore nullo.
 Prendo i quadrati degli scarti:
 $[M(X)-X_1]^2, [M(X)-X_2]^2, [M(X)-X_3]^2, \dots, [M(X)-X_n]^2,$
 La media sara':
 $\sigma^2(X) =$
 $= [M(X)-X_1]^2 p_1 + [M(X)-X_2]^2 p_2 + [M(X)-X_3]^2 p_3 + \dots + [M(X)-X_n]^2 p_n$
 Di solito si scrive nella forma piu' compatta:

$$\sigma^2(X) = \sum_{k=1}^{k=n} (M(X) - X_k)^2 p_k$$

La varianza indica la concentrazione, quindi:
Minore e' la varianza e maggiore e' la concentrazione dei dati attorno al valore medio
Maggiore e' la varianza e maggiore e' la dispersione dei dati attorno al valore medio

Prendiamo il solito esempio del lancio di un dado:

X	1	2	3	4	5	6
Pr	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Avremo

$$M(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 21/6 = 7/2 = 3,5$$

Quindi la varianza sara':

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= (1 - 7/2)^2 \cdot 1/6 + (2 - 7/2)^2 \cdot 1/6 + (3 - 7/2)^2 \cdot 1/6 + (4 - 7/2)^2 \cdot 1/6 + (5 - 7/2)^2 \cdot 1/6 + (6 - 7/2)^2 \cdot 1/6 = \\ &= (-5/2)^2 \cdot 1/6 + (-3/2)^2 \cdot 1/6 + (-1/2)^2 \cdot 1/6 + (1/2)^2 \cdot 1/6 + (3/2)^2 \cdot 1/6 + (5/2)^2 \cdot 1/6 = \\ &= (25/4) \cdot 1/6 + 9/4 \cdot 1/6 + 1/4 \cdot 1/6 + 1/4 \cdot 1/6 + 9/4 \cdot 1/6 + 25/4 \cdot 1/6 = \\ &= 25/24 + 9/24 + 1/24 + 1/24 + 9/24 + 25/24 = \\ &= 70/24 = 35/12 \end{aligned}$$

cioe' la varianza dei dati attorno al valore medio in questo caso vale circa 3

Per il calcolo pratico della varianza spesso e' utile la formula:

$$\sigma^2(X) = M(X^2) - m^2 = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Dimostrazione:

$$\sigma^2(X) = M(X-m)^2 = M(X^2 - 2mX + m^2) = M(X^2) - M(2mX) + M(m^2) =$$

Sappiamo che m e' una costante quindi $M(m^2) = m^2$.

Utilizziamo poi la considerazione che il valore medio del prodotto di una variabile casuale per una costante e' uguale alla costante per il valore medio della variabile casuale [se vuoi vedere la dimostrazione](#) (Nota):

$$= M(X^2) - 2mM(X) + m^2 =$$

essendo $m = M(X)$:

$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + [M(X)]^2 = M(X^2) - 2[M(X)]^2 + [M(X)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Nota: Dimostriamo che il valore medio del prodotto di una variabile casuale per una costante e' uguale alla costante per il valore medio della variabile casuale.

La dimostrazione e' elementare:

Consideriamo la variabile casuale:

kX	kX ₁	kX ₂	kX ₃	kX _n
Pr	p ₁	p ₂	p ₃	p _n

Essendo k una costante, allora il valore medio e':

$$M(kX) = kX_1p_1 + kX_2p_2 + kX_3p_3 + \dots + kX_np_n =$$

Raccolgo k

$$= k(X_1p_1 + X_2p_2 + X_3p_3 + \dots + X_np_n) = k[M(X)]$$

Come volevamo.

Applichiamo la formula all'esempio precedente:

$$m = M(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 21/6$$

$$M(X^2) = 1 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 9 \cdot 1/6 + 16 \cdot 1/6 + 25 \cdot 1/6 + 36 \cdot 1/6 = 1/6 + 4/6 + 9/6 + 16/6 + 25/6 +$$

$$36/6 = 91/6$$

$$m^2 = 441/36$$

Quindi:

$$\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = M(X^2) - m^2 = 91/6 - 441/36 = 105/36 = 35/12$$

Come avevamo già trovato.

e) Scarto quadratico medio

Siccome la varianza è una quantità di secondo grado (essendovi i quadrati degli scarti) al suo posto si considera spesso la sua radice quadrata, (in modo da avere valori dello stesso ordine dei dati) che viene indicata come *scarto quadratico medio*.

Definizione:

Lo scarto quadratico medio è la radice quadrata del valore della varianza.

Viene indicata con il simbolo $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} (M(X) - X_k)^2 p_k}$$

Prendiamo il solito esempio del lancio di un dado:

X	1	2	3	4	5	6
Pr	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Avremo:

$$\sigma^2(X) = 35/12$$

Quindi lo scarto quadratico medio è:

$$\sigma(X) = \sqrt{35/12} \sim 1,7$$

f) Distribuzioni di probabilità discrete

Data la variabile aleatoria:

X	X_1	X_2	X_3	X_n
Pr	p_1	p_2	p_3	p_n

La tabella rappresenta la corrispondenza fra il valore delle **X** ed il relativo valore di probabilità; questa corrispondenza definisce una legge che lega i valori delle **X** alle rispettive probabilità.

Tale legge è detta anche funzione di distribuzione di probabilità.

Analizziamo ora alcune delle distribuzioni di probabilità che capitano in problemi che si presentano con maggior frequenza.

- [Distribuzione binomiale](#)
- [Distribuzione geometrica](#)
- [Distribuzione di Poisson](#)

(1) Distribuzione binomiale

Analizziamo ora la *distribuzione binomiale o di Bernoulli*, che si ha quando dobbiamo considerare sia la probabilità di un evento che la sua probabilità contraria su un grande numero di prove:

- [Problema delle prove ripetute](#)
- [Un esempio per capire meglio](#)

- Distribuzione binomiale (o di Bernoulli)
- Caratteristiche

(a) Il problema delle prove ripetute

Uno dei problemi che capitano frequentemente nel calcolo di probabilita' e' quello di calcolare la probabilita' che un dato evento capiti k volte su n prove effettuate.

Esempio:

Lanciando 5 volte un dado che probabilita' ho di ottenere 3 volte il valore 3?

Supponiamo, per iniziare, che mi interessi l'ordine di uscita e quindi il mio problema diventi; ad esempio: **Lanciando 5 volte un dado che probabilita' ho di ottenere prima due volte 3, poi due numeri diversi ed infine ancora il valore 3?**

In questo caso il problema e' elementare:

deve uscire tre e poi deve uscire tre e poi deve uscire un numero diverso da 3 e poi deve uscire 3

3 3 a a 3

con a che indica un altro valore (diverso da 3).

Abbiamo quindi le probabilita':

1/6 probabilita' di uscita del valore 3

5/6 = 1-1/6 probabilita' di uscita di un numero diverso da 3 (probabilita' contraria dell'uscita del numero 3)

Applico il teorema della probabilita' composta ed ottengo:

Probabilita' = 1/6 · 1/6 · 5/6 · 5/6 · 1/6 = (1/6)³ · (5/6)² = (1/6)³ · (5/6)⁵⁻³

Piu' in generale potremo scrivere:

Probabilita' = p^k · (1-p)^{n-k}

Ora torniamo al nostro problema:

Lanciando 5 volte un dado che probabilita' ho di ottenere 3 volte il valore 3?

se non mi interessa l'ordine di uscita allora ho le **10 possibilita'** (*Nota*)

333aa 33a3a 3a33a a333a 33aa3

3a3a3 a33a3 aa333 a3a33 3aa33

Quindi avremo che le nostre probabilita' sono:

$$\text{Probabilita'} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3}$$

Nota: Per calcolare il numero delle possibilita' considera che i gruppi che si formano sono le **combinazioni semplici** di 5 oggetti presi 3 a 3:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Passando al caso generale potremo dire che la probabilita' che un dato evento capiti k volte su n prove effettuate sara':

$$\text{Probabilita'} = \binom{5}{3} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Se ora consideriamo il problema per i vari valori di k = 1, 2, 3, ..., n allora avremo una variabile aleatoria (chiamiamola col nuovo termine **S_n** di possibili valori **X₁, X₂, X₃, ..., X_n**) la cui rappresentazione sara' la distribuzione cercata.

(b) Un esempio per capire meglio

Non sono concetti semplici, quindi vediamo di sviluppare un esempio, il piu' semplice possibile che ci permetta di vedere in pratica come si costruisce la distribuzione cercata: consideriamo un evento tale che la probabilita' e la sua probabilita' contraria abbiano lo stesso valore, ad esempio l'uscita di testa nel lancio di una moneta.

Sviluppiamo problemi diversi per diversi valori di n.

Nella prima riga scrivo le varie combinazioni che possono uscire e nella seconda il numero di tali combinazioni, nella terza il valore della probabilita' dell'evento ed, a destra, la rappresentazione grafica con, in verticale, il numero delle combinazioni possibili:

1. probabilita' di uscita di testa nel lancio di una moneta S_1

T	C	
1	1	
$1/2$	$1/2$	

2. probabilita' di uscita di testa nel lancio di due monete S_2

TT	TC CT	CC	
1	2	1	
$1/4$	$2/4$	$1/4$	

3. probabilita' di uscita di testa nel lancio di tre monete S_3

TTT	TTC TCT CTT	CCT CTC TCC	CCC	
1	3	3	1	
$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	

4. probabilita' di uscita di testa nel lancio di quattro monete S_4

TTTT	TTTC TTCT TCTT CTTT	TTCC TCTC CTTC CCTT CTCT TCCT	CCCT CCTC CTCC TCCC	CCCC	
1	4	6	4	1	
$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$	

5. probabilita' di uscita di testa nel lancio di cinque monete S_5

TTTTT	TTTTC TTTC TTTCT TCTC TTCTT CTTT TCTTT CTTT CTTTT	TTTCC TTCTC TCTTC CTTTC TCTCT CTTCT CTCTT CCTTT TTCCT TCCTT	CCCTT CCTCT CTCCT TCCCT CTCTC TCCTC TCTCC TTCCC CCTTC CTCC	CCCTC CCCTC CCTCC CTCCC TCCCC	CCCCC	
1	5	10	10	5	1	
$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$	

Osserviamo due fatti importanti:

- Se sostituisco ai numeri delle combinazioni i valori delle probabilita' i grafici vanno bene lo stesso: in tal caso l'area di ogni rettangolo corrisponde alla probabilita' dell'evento e la somma di tutte le aree deve sempre dare come risultato 1.
- I numeri che abbiamo trovato corrispondono ai valori del [triangolo di Tartaglia](#) e quindi i nostri valori corrispondono ai coefficienti delle [potenze del binomio](#).

Se hai bisogno di ripassare nei particolari il [Triangolo di Tartaglia](#).

(c) Distribuzione binomiale (o di Bernoulli)

Quanto fatto alla pagina precedente ci porta alla formula per calcolare la variabile aleatoria. Facciamolo prima su un esempio.

Trovare le varie probabilita' di "uscita di testa" nel lancio di 5 monete.

Dobbiamo trovare la formula per calcolare i seguenti valori delle singole probabilita' della variabile aleatoria S_5 .

n° uscita teste	5 teste	4 teste	3 teste	2 teste	1 testa	0 teste
probabilita'	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Per trovarle sara' sufficiente considerare i fattori dello sviluppo della **potenza quinta del binomio**; p e' la probabilita' di uscita di testa per una moneta ($1/2$) e q e' la sua probabilita' contraria (sempre $1/2$):

$$(p+q)^5 = \sum_{k=0,1,2,3,4,5} \binom{5}{k} \cdot p^k \cdot q^{5-k}$$

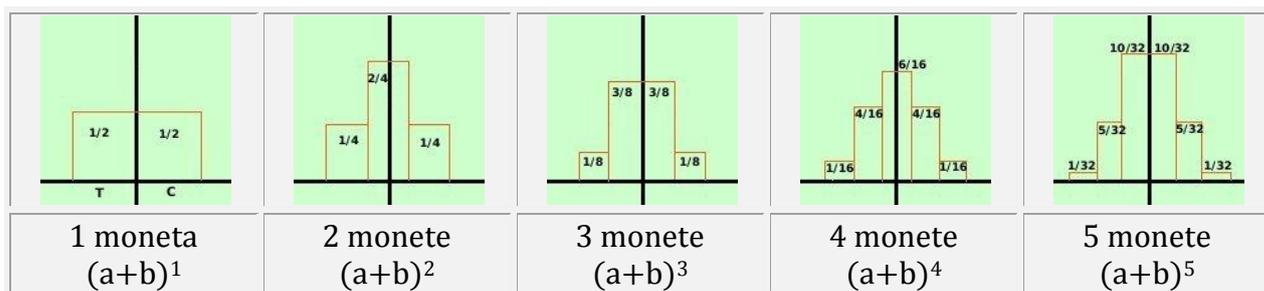
$$= 1 \cdot (1/2)^5 \cdot (1/2)^0 + 5 \cdot (1/2)^4 \cdot (1/2)^1 + 10 \cdot (1/2)^3 \cdot (1/2)^2 + 10 \cdot (1/2)^2 \cdot (1/2)^3 + 5 \cdot (1/2)^1 \cdot (1/2)^4 + 1 \cdot (1/2)^0 \cdot (1/2)^5 =$$

$$= 1/32 + 5/32 + 10/32 + 10/32 + 5/32 + 1/32$$

Possiamo quindi generalizzare la formula per calcolare la probabilita' di uscita di testa k volte su n prove effettuate, considerandola come il termine della potenza del binomio $(p+q)^n$ che ha il termine p a potenza k :

$$\text{Probabilità} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Questi valori considerati al variare di k forniscono una variabile aleatoria la cui rappresentazione e' detta anche distribuzione binomiale (corrispondendo allo sviluppo della potenza del binomio) od anche distribuzione di Bernoulli:



Tutte le aree delle distribuzioni binomiali, somma dei rettangoli, essendo somma di probabilita', valgono 1.

All'aumentare del numero di lanci effettuati le distribuzioni binomiali si avvicinano ad una curva detta curva a campana o curva di Gauss.

Una variabile aleatoria di tipo binomiale viene anche detta brevemente **variabile binomiale** e la indicheremo con la lettera S .

Le probabilita' p e q possono anche essere diverse: vedi questo [esempio](#):

Lanciando 4 volte un dado costruire la distribuzione binomiale per l'evento: uscita del valore 3.

In questo caso abbiamo $p = 1/6$ e $q = 5/6$.

Applichiamo la formula e consideriamo i fattori della potenza quarta del binomio:

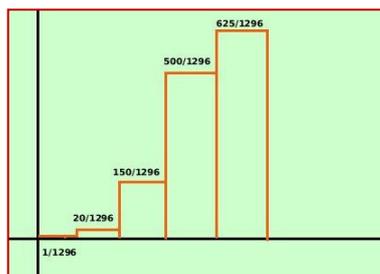
$$(p+q)^4 = \sum_{k=0,1,2,3,4} \binom{4}{k} \cdot p^k \cdot q^{4-k}$$

$$= 1 \cdot (1/6)^4 \cdot (5/6)^0 + 4 \cdot (1/6)^3 \cdot (5/6)^1 + 6 \cdot (1/6)^2 \cdot (5/6)^2 + 4 \cdot (1/6)^1 \cdot (5/6)^3 + 1 \cdot (1/6)^0 \cdot (5/6)^4 =$$

$$= 1/1296 + 20/1296 + 150/1296 + 500/1296 + 625/1296$$

S_4	0 volte	1 volta	2 volte	3 volte	4 volte
Pr	1/1296	20/1296	150/1296	500/1296	625/1296

e la rappresentazione binomiale diventa:



Da notare che la distribuzione non e' simmetrica, questo dipende dalla diversita' delle due probabilita'; comunque aumentando il numero delle prove potremo ottenere anche qui una configurazione a campana ma "storta", non simmetrica, che pero' tendera' a diventare simmetrica quando le prove tenderanno ad infinito.

(d) Caratteristiche della variabile binomiale

Raccogliendo, nella variabile binomiale S_n abbiamo che:

- Ogni prova puo' avere solo due esiti con probabilita' l'una p e l'altra $q=(1-p)$
- All'aumentare del numero delle prove, ogni prova e' indipendente dalle altre e quindi la probabilita' del primo evento e' sempre p .

Per la variabile binomiale abbiamo:

- La **media** per un evento X vale:

$$M(X) = n p$$

essendo n il numero di prove effettuate e p la probabilita' dell'evento.

Cioe' se un evento ha probabilita' p allora in n prove la media del numero di volte che l'evento si verifica e' np .

Esempio:

Lanciamo un dado 360 volte.

Trovare la media dell'evento: $X = \text{"Uscita del valore 3"}$

Abbiamo $n = 360$ e $p = 1/6$

$$M(X_n) = 360 \cdot 1/6 = 60$$

In media il valore 3 uscirà 60 volte

- La **varianza** vale:

$$\sigma^2(X_n) = npq$$

essendo n il numero di prove effettuate, p la probabilita' dell'evento e q la probabilita' contraria.

Esempio:

Lanciamo un dado 360 volte.

Trovare la varianza dell'evento: $X = \text{"uscita del valore 3"}$

Abbiamo $n = 360$ e $p = 1/6$ e $q = 5/6$

$$\sigma^2(X_n) = 360 \cdot 1/6 \cdot 5/6 = 50$$

Esempio:

Un partecipante ad una gara di tiro con l'arco colpisce il bersaglio in media con la probabilita' dell'80%.
Calcolare il numero medio di centri che egli puo' aspettarsi con 20 tiri e calcolare anche la varianza:

probabilita' di colpire = $80/100 = 4/5$

probabilita' di non colpire = $20/100 = 1/5$

Abbiamo la variabile aleatoria (per 1 tiro):

S_1	non X	X
Pr	1/5	4/5

Per 20 tiri avremo:

$$M(X_{20}) = 20 \cdot 4/5 = 16$$

$$\sigma^2(X_{20}) = 20 \cdot 4/5 \cdot 1/5 = 16/5 = 3,2$$

(2) Distribuzione geometrica

Analizziamo ora la **distribuzione geometrica**, che si ha quando dobbiamo considerare le probabilita' del primo accadere di un evento:

- Problema del primo accadere di un evento
- Costanza dell'attesa di un evento
- Distribuzione geometrica
- Esempi di applicazione

(a) Problema del primo accadere di un evento

Consideriamo un gioco aleatorio, ad esempio l'estrazione di un numero al lotto in una particolare ruota, e chiediamoci qual'e' la probabilita' che l' evento "uscita del numero" accada alla prima estrazione, alla seconda, alla terza, ... eccetera.

Se consideriamo la variabile aleatoria "l'evento si verifica la prima volta all'n-ma prova" con $n=1,2,3,\dots$ avremo una variabile la cui distribuzione di probabilita' e' detta

Distribuzione geometrica .

Esempi:

Trovare le probabilita' di uscita di "testa" al primo, secondo, terzo,...n-esimo lancio di una moneta.

Trovare le probabilita' di uscita del numero 3 nel lancio di un dado al primo, al secondo, all'n-esimo lancio.

Trovare le probabilita' di uscita del numero 1 sulla ruota di Bari alla prima, alla seconda, alla n-esima estrazione.

(b) Costanza dell'attesa di un evento

E' qui doveroso fare un discorso rivolto ai cosiddetti "sistemisti" cioe' ai giocatori che cercano di vedere i "ritardi" di uscite di numeri per poter scommettere sulla loro prossima uscita:

I discorsi che facciamo valgono solamente all'inizio delle prove:

Una volta fatta una prova nella prova successiva l'evento ha esattamente le stesse probabilita' di accadere di quelle che aveva nella prova precedente

E' quindi inutile stare ad osservare i numeri ritardatari per scommettere sulla loro uscita; la probabilita' di uscita sara' sempre la stessa di un qualunque altro numero preso a caso.

(c) Distribuzione geometrica

Chiamando:

p la probabilita' che l'evento si verifichi

q la probabilita' che l'evento non si verifichi

avremo la variabile aleatoria **Z** (si chiama Z per consuetudine):

Z	1	2	3	4	n
Pr	p	q·p	q ² ·p	q ³ ·p	q ⁿ⁻¹ ·p

Note sulla costruzione della tabella:

la probabilita' che l'evento accada alla prima prova e' **p**

la probabilita' che l'evento accada alla seconda prova e' **q·p** perche' avremo che l'evento non accade alla prima (q) ma alla seconda (p)

la probabilita' che l'evento accada alla terza prova e' **q²·p** perche' avremo che l'evento non accade alla prima (q), non accade alla seconda (q) ma alla terza (p)

la probabilita' che l'evento accada alla quarta prova e' **q³·p** perche' avremo che l'evento non accade alla prima (q), non accade alla seconda (q), non accade alla terza (q) ma alla quarta (p)

.....

la probabilita' che l'evento accada alla n-sima prova e' **qⁿ⁻¹·p** perche' avremo che l'evento non accade alla prima (q), non accade alla seconda (q), non accade alla terza (q), non accade alla (n-1)esima (q), ma accade alla n-esima prova (p)

In generale si indica anche con:

$$p(Z=n) = p \cdot q^{n-1}$$

Da notare che l'insieme delle probabilita' e' una successione geometrica di ragione q, ed, essendo q sempre minore di 1, la successione tendera' sempre a zero.

Vediamo, su un semplice esempio, la rappresentazione grafica di una distribuzione geometrica.

Trovare le probabilita' di uscita di "testa" al primo, secondo, terzo,...n-esimo lancio di una moneta e rappresentarla mediante la distribuzione geometrica:

p probabilita' di uscita di testa = 1/2

q probabilita' di non uscita di testa = 1/2

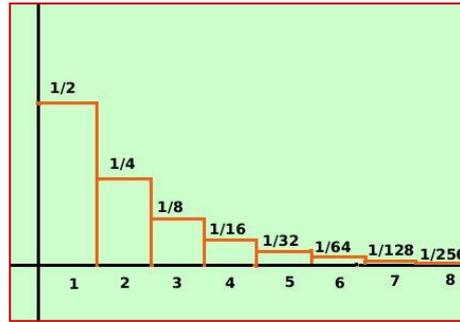
La variabile aleatoria **Z** sara':

Z	1	2	3	4	n
Pr	1/2	1/2·1/2	(1/2) ² ·1/2	(1/2) ³ ·1/2	(1/2) ⁿ⁻¹ ·1/2

Cioe'

Z	1	2	3	4	n
Pr	1/2	1/4	1/8	1/16	(1/2) ⁿ

ed avremo come rappresentazione grafica della distribuzione geometrica:



Questa configurazione sarà valida in generale: avremo che i vari valori di probabilità all'aumentare delle prove diminuiranno sempre fino a ridursi a valori vicinissimi a zero.

Da notare che, siccome l'area di tutti i rettangoli vale 1 (evento certo) e l'area del primo rettangolo vale 1/2 l'evento è sempre più probabile che succeda alla prima prova (è più probabile che esca testa per la prima volta alla prima prova piuttosto che esca per la prima volta alla millesima prova).

(d) Esempi di applicazione

Esempi:

Trovare le probabilità di uscita per la prima volta del numero 3 nel lancio di un dado al primo, al secondo, all'n-esimo lancio e rappresentarla mediante la distribuzione geometrica.

p probabilità di uscita del numero 3 = 1/6

q probabilità di non uscita del numero 3 = 5/6

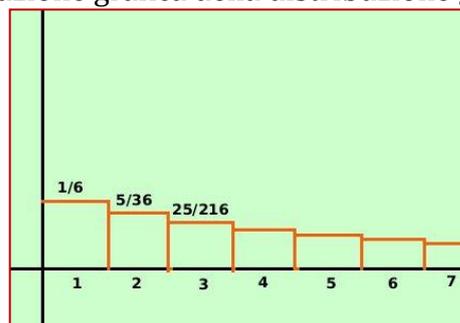
la variabile aleatoria **Z** sarà'

Z	1	2	3	4	n
Pr	1/6	5/6 · 1/6	(5/6) ² · 1/6	(5/6) ³ · 1/6	(5/6) ⁿ⁻¹ · 1/6

Cioè'

Z	1	2	3	4
Pr	1/6	5/36	25/216	125/1296

ed avremo come rappresentazione grafica della distribuzione geometrica:



I vari valori di probabilità all'aumentare delle prove diminuiranno sempre fino a ridursi a valori vicinissimi a zero.

Notiamo anche qui che, siccome l'area di tutti i rettangoli vale 1 (evento certo) e l'area del primo rettangolo vale 1/6 e gli altri valgono meno, l'evento è sempre più probabile che succeda alla prima prova (è più probabile che esca 3 per la prima volta alla prima prova piuttosto che esca 3 per la prima volta al millesimo lancio).

Trovare le probabilita' della prima uscita del numero 1 sulla ruota di Bari alla prima, alla seconda, alla n-esima estrazione e rappresentarla mediante la distribuzione geometrica
 Sulla ruota di Bari vengono estratti 5 numeri su 90 possibili (semplifichiamo un poco i calcoli)

Veramente dovremmo fare il conto:
probabilita' di uscita del numero uno al primo posto = 1/90
probabilita' di uscita del numero uno al secondo posto = 1/89
probabilita' di uscita del numero uno al terzo posto = 1/88
probabilita' di uscita del numero uno al quarto posto = 1/87
probabilita' di uscita del numero uno al quinto posto = 1/86
e poi sommare le varie probabilita'
 $P = 1/90 + 1/89 + 1/88 + 1/87 + 1/86 = 0,057$
(approssimato alla terza cifra decimale)
 Ma qui, per semplificare, consideriamo la probabilita' totale come 5/90, cioe' consideriamo l'estrazione come se rimettesimo il numero gia' estratto nell'urna, altrimenti dovremmo trattare con numeri troppo complicati.
 Inoltre il valore **5/90**, approssimato alla terza cifra decimale, vale **0,056** che e' abbastanza vicino al valore trovato prima per poter avere risultati analoghi nell'esercizio

Quindi:

p probabilita' di uscita del numero 1 = $5/90 = 1/18$

q probabilita' di non uscita del numero $85/90 = 17/18$

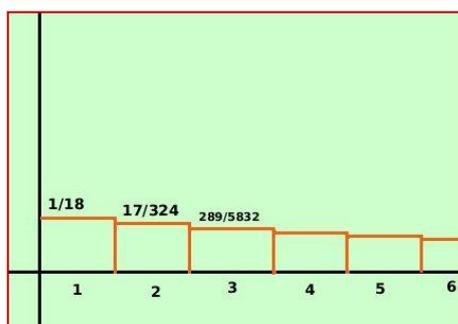
la variabile aleatoria **Z** sara':

Z	1	2	3	n
Pr	1/18	$17/18 \cdot 1/18$	$(17/18)^2 \cdot 1/18$	$(17/18)^{n-1} \cdot 1/18$

Cioe'

Z	1	2	3	4
Pr	1/18	17/324	289/5832	4913/104976

ed avremo come rappresentazione grafica della distribuzione geometrica:



Nota che, in questo caso, all'aumentare del valore della probabilita' contraria l'area dei rettangoli tende a zero meno velocemente (gli scalini degradano piu' dolcemente).

(3) Distribuzione di Poisson

Analizziamo ora la **distribuzione di Poisson**, che si ha quando dobbiamo considerare le probabilita' di eventi che accadono molto raramente:

- [Problema dell'accadere di eventi rari](#)
- [Distribuzione di Poisson](#)
- [Esempi di applicazione](#)

(a) Problema del primo accadere di un evento

Se consideriamo le probabilita' di un evento che capita molto raramente, utilizzando la distribuzione binomiale (di Bernoulli), dovremo fare un numero enorme di calcoli considerando probabilita' dell'evento e probabilita' contraria. La distribuzione di Poisson ci permette invece di calcolare tale probabilita' con un'ottima approssimazione senza dover fare eccessivi calcoli.

L'importante per poter utilizzare la distribuzione di Poisson e' il fatto che la probabilita' dell'accadere dell'evento sia minuscola e sia molto elevato il numero dei dati considerati come universo. Come orientamento pratico possiamo grosso modo dire che la distribuzione di Poisson e' una buona approssimazione se il numero di casi possibili e' superiore a 100 e la probabilita' dell'accadere dell'evento considerato e' minore di almeno 1/10.

Mi ricordo che quando insegnavo, l'esempio classico da cui partivo (e che penso sia stato usato da Poisson) era sul numero di soldati di 10 reggimenti prussiani morti per il calcio di un mulo ogni anno per 20 anni: la frequenza dell'evento coincide in pratica con il valore della probabilita' dato dalla distribuzione di Poisson: nelle pagine seguenti riporto il calcolo delle varie probabilita' confrontato con le frequenze effettivamente ottenute.

(b) Distribuzione di Poisson

Se vuoi vedere la [dimostrazione per calcolare](#) la variabile aleatoria (*Scheda n. E2*). La distribuzione di Poisson e' una distribuzione che assume i valori **0,1,2,3,4,.....x** con probabilita':

$$P_x = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

essendo $\mu = p n$ con p probabilita' dell'evento ed n numero dei casi possibili per l'evento; Scriviamola come variabile aleatoria $\frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu}$

Evento	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = x
probabilita'	$\frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^1}{1!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^3}{3!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$

l'evento puo' accadere 0 volte, 1 volta, 2 volte, eccetera

Come esercizio riprendiamo l'esempio della pagina precedente (anche se un po' macabro) e prendiamo le tabelle di soldati morti in 10 reggimenti prussiani in 20 anni, cioe' ci comportiamo come se fossero 200 reggimenti controllati per un anno; abbiamo le frequenze:

Morti per un calcio di mulo	nessuno	un morto	due morti	tre morti	quattro morti	cinque morti
Numero reggimenti	109	65	22	3	1	0

cioe', per il calcio di un mulo, in un anno 109 reggimenti non hanno avuto nessun morto, 65 reggimenti hanno avuto un morto, 22 reggimenti hanno avuto due morti ciascuno, 3 reggimenti hanno avuto 3 morti ed uno ha avuto 4 morti; in totale i morti son stati 122.

Siccome i morti sono stati 122 la frequenza di morte sara' data dal rapporto fra il numero di morti ed il numero dei reggimenti, cioe' $122/200 = 0,61$.

Consideriamo allora tale frequenza come probabilita' $p = 0,61$ ed avendo considerato una sola possibilita' (morte):

$$np = 1 \cdot 0,61 = 0,61$$

Quindi abbiamo la distribuzione di Poisson sulla probabilita' che ogni reggimento abbia 0,1,2,3,4,5 morti in un anno:

Numero morti	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
Probabilita' per ogni reggimento	$\frac{0,61^0}{0!} e^{-0,61}$	$\frac{0,61^1}{1!} e^{-0,61}$	$\frac{0,61^2}{2!} e^{-0,61}$	$\frac{0,61^3}{3!} e^{-0,61}$	$\frac{0,61^4}{4!} e^{-0,61}$	$\frac{0,61^5}{5!} e^{-0,61}$

e, con una buona calcolatrice otteniamo:

Numero morti	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
Probabilita' per ogni reggimento	0,54335	0,33144	0,10109	0,02056	0,00313	0,00038

Per ottenere la probabilita' per i 200 reggimenti bastera' moltiplicare per 200.

Numero morti	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
Probabilita' moltiplicata per tutti i reggimenti	108,71	66,288	20,218	4,112	0,626	0,076

Se ora la confrontiamo con la frequenza effettiva vediamo che abbiamo un'ottima approssimazione :

Numero morti	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
Probabilita' per tutti i reggimenti	108,71	66,288	20,218	4,112	0,626	0,076
Frequenza	109	65	22	3	1	0
Morti effettivi	0	65	44	9	4	0

Intendiamoci: siamo partiti da una frequenza e quindi otteniamo dei valori logicamente compatibili con tale frequenza, pero' l'importante e' che la distribuzione di Poisson da' la "tendenza" di un fenomeno raro e di applicazioni se ne avranno tantissime: dal progettare il mercato per farmaci di malattie rare al vedere la distribuzione di auto con 0,1,2,3 incidenti per anno e quindi fissare le tariffe bonus/malus, al programmare il numero di pezzi da mettere in una spedizione presupponendo che una piccolissima percentuale sia difettosa, al numero di telefonate che arrivano ad un centralino, alle auto che si fermano ad una stazione di servizio, ai clienti di uno sportello bancario, eccetera, eccetera.....

Scheda n. E2 : Dimostrazione della formula della distribuzione di Poisson

Vediamo come si ricava la formula della distribuzione di Poisson.

Ti avviso che, siccome dovremo fare delle approssimazioni, il valore trovato non e' la probabilita' vera, ma considerando probabilita' piccole e numero di casi molto elevato, la approssimera' bene.

Consideriamo un qualunque problema del tipo prove ripetute cioe' in distribuzione binomiale; supponiamo che n, numero dei casi possibili, sia molto grande; poniamo $\mu = p n$.

Cominciamo a calcolare i vari valori della variabile aleatoria: ricordando che il valore generico vale:

$$\text{Probabilita'} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

per $k = 0, 1, 2, \dots$

- per $k=0$ avremo:

$$P(0) = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n = q^n = (1 - p)^n = \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$$

Nell'ultimo passaggio ho moltiplicato p per n/n in modo da avere μ al numeratore e quindi ho n al denominatore Siccome il numero n deve essere molto grande calcolo il limite dell'espressione per $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n/(-\mu)}\right)^{-n/\mu}\right]^\mu =$$

Dentro parentesi tonda ho portato $-\mu$ al denominatore (regola della divisione fra due frazioni) e diviso la potenza n nelle due potenze $-n/\mu$ e $-\mu$: posso farlo perche' rimoltiplicando mi torna n .

Ora approssimiamo considerando μ numero dato perché prodotto di un numero molto grande per un numero molto piccolo, in tal caso posso portare il limite dentro parentesi quadra.

Veramente matematicamente non si potrebbe, ma siccome noi cerchiamo un valore approssimato tale approssimazione è possibile e sarà sempre più vicina al valore reale quando n è abbastanza grande e p abbastanza piccolo.

Quello che ottengo è un **limite notevole**:

$$= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n/(-\mu)} \right)^{-n/\mu} \right]^{-\mu} = e^{-\mu}$$

- Passiamo ora a calcolare il termine generico $P(x)$:

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} =$$

adesso moltiplico sia al numeratore che al denominatore per n^{x-1} in modo che al numeratore moltiplicando per n^{x-1} ottengo n^x come primo fattore del prodotto:

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} \cdot \frac{n^{x-1}}{n^{x-1}} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{n^x}{x!} \cdot \frac{(n-1)\dots(n-x+1)}{n^{x-1}} \cdot p^x \cdot q^{n-x} =$$

Ora, avendo sopra il segno di frazione $x-1$ fattori li suddivido mettendo a ciascuno al denominatore il termine n (se rimoltiplico al denominatore mi torna n^{x-1}); inoltre raccolgo assieme n^x e p^x scrivendo $(np)^x$; infine al posto di q^{n-x} metto $(1-p)^{n-x}$;

$$= \frac{(np)^x}{x!} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \frac{(n-3)}{n} \cdot \dots \cdot \frac{(n-x+1)}{n} \cdot (1-p)^{n-x} =$$

Poniamo ora $np = \mu$ abbiamo:

$$1 - p = 1 - p \cdot n/n = 1 - \mu/n$$

$$= \frac{\mu^x}{x!} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \frac{(n-3)}{n} \cdot \dots \cdot \frac{(n-x+1)}{n} \cdot (1-\mu/n)^{n-x} =$$

Spezzo l'ultima potenza nelle sue componenti e scrivo le frazioni come somma di termini

$$= \frac{\mu^x}{x!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

e siccome il numero n deve essere molto grande calcolo il limite per $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu^x}{x!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-x} \right]$$

Come nel calcolo precedente consideriamo il primo fattore $\mu^x/x!$ come una costante essendo μ composto da n molto grande e p molto piccola; tutti gli altri fattori al limite valgono 1 eccetto il penultimo che è il solito **limite notevole** e abbiamo già calcolato in cima alla pagina che vale $e^{-\mu}$, quindi otteniamo:

$$P_x = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Come vedi non è una dimostrazione facile e ci dà solamente un valore approssimato della probabilità reale, però, tale valore è molto comodo da utilizzare.

(c) Esempi di applicazione sulla distribuzione di Poisson

La percentuale di pezzi difettosi prodotti da una macchina è, in media, dello 0,2%; siccome la ditta esporta tali pezzi in confezioni di 1000 calcolare quanti pezzi in più dovranno essere messi in ogni confezione perché la probabilità di avere in una confezione meno di 1000 pezzi efficienti sia inferiore allo 0,01%

Cioè la macchina in media produce 2 pezzi difettosi ogni mille, quindi la probabilità che un pezzo sia difettoso è $p = 0,002$.

Il numero di pezzi per confezione è $n = 1000$

Essendo $n=1000$ molto grande e $p=0,002$ molto piccola, possiamo approssimare bene utilizzando la distribuzione di Poisson. Costruiamo la variabile aleatoria di Poisson per 0,1,2,3,4,5,... pezzi e vediamo a quale numero corrisponde una probabilita' inferiore a 0,01

$$P_x = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

essendo $\mu = p n = 1000 \cdot 0,002 = 2$

Evento	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5	x = 6	x = 7	x = 8
probabilita' per 1 pezzo	$\frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^1}{1!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^3}{3!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^4}{4!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^5}{5!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^6}{6!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^7}{7!} e^{-\mu}$	$\frac{\mu^8}{8!} e^{-\mu}$
probabilita' per 1 pezzo	$\frac{2^0}{0!} e^{-2}$	$\frac{2^1}{1!} e^{-2}$	$\frac{2^2}{2!} e^{-2}$	$\frac{2^3}{3!} e^{-2}$	$\frac{2^4}{4!} e^{-2}$	$\frac{2^5}{5!} e^{-2}$	$\frac{2^6}{6!} e^{-2}$	$\frac{2^7}{7!} e^{-2}$	$\frac{2^8}{8!} e^{-2}$
Probabilita' di pezzi difettosi	0,0498	0,1353	0,2707	0,2707	0,3609	0,0902	0,0241	0,0021	0,00005

cioe' abbiamo una probabilita':
 del 4,98% di non avere pezzi difettosi
 del 13,53% di avere un solo pezzo difettoso
 del 27,07% di avere esattamente 2 pezzi difettosi
 del 27,07% di avere esattamente 3 pezzi difettosi
 del 36,09% di avere esattamente 4 pezzi difettosi
 del 9,02% di avere esattamente 5 pezzi difettosi
 del 2,41% di avere esattamente 6 pezzi difettosi
 del 0,21% di avere esattamente 7 pezzi difettosi
 del 0,005% di avere esattamente 8 pezzi difettosi; questo valore e' inferiore alla probabilita' cercata.

Da notare che la somma di tutte le probabilita' si avvicina al valore 1.

Osservando la tabella possiamo dire intuitivamente che in ogni confezione di 1000 pezzi vanno aggiunti 8 pezzi per essere ragionevolmente sicuri che la confezione contenga 1000 pezzi efficienti .

Continuando il calcolo, la probabilita' che 9 pezzi siano rovinati contemporaneamente e' (riapplico la formula)

$$p = 0,000002$$

cioe' e' la probabilita' che ogni 500 confezioni da 1000 pezzi ve ne sia una con 9 pezzi difettosi.

2. Variabili aleatorie continue

Parleremo di variabili aleatorie continue quando l'insieme dei valori possibili sara' continuo, cioe' avremo un numero infinito di probabilita' per tutti i valori compresi in un intervallo in corrispondenza biunivoca con un intervallo della Retta Reale (per semplicita').

a. Dal discreto al continuo

Esistono vari tipi di problemi in cui l'insieme dei valori possibili e' continuo, cioe' abbiamo un numero infinito di probabilita' per tutti i valori compresi in un intervallo in corrispondenza biunivoca con un intervallo della Retta Reale.

Esempi:

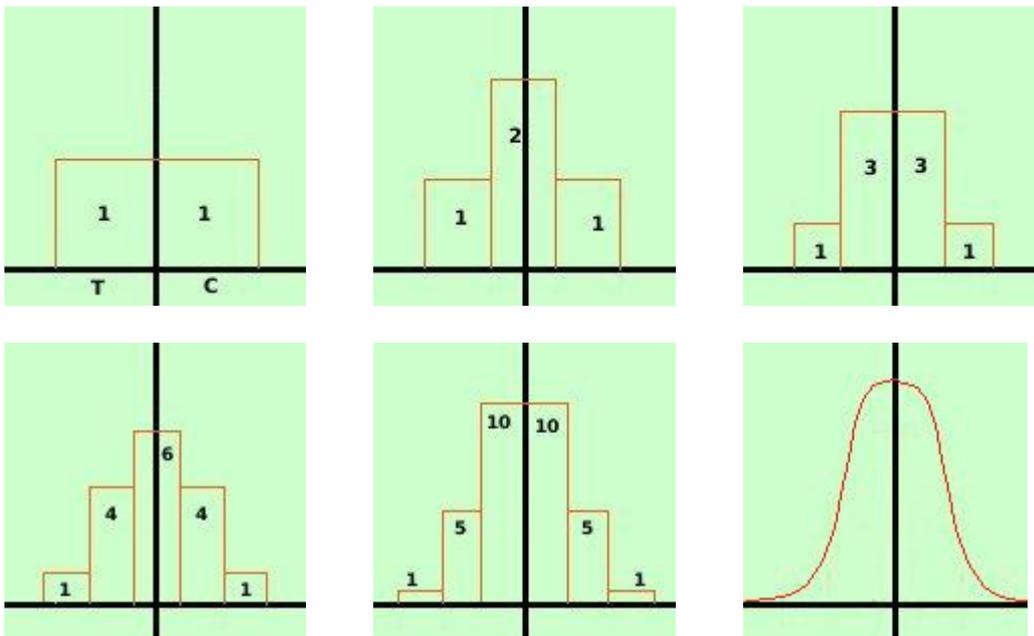
- **La probabilita' di caduta di un satellite su una zona dell'Europa.**
So solamente che cadra' in una certa zona con probabilita' p , ma non posso indicare un punto o un numero finito di punti in cui puo' cadere
- **L'usura di un cilindro ruotante in un meccanismo.**
Posso indicare il raggio massimo ed il raggio minimo che mi permette di usarlo, ma non posso suddividere la differenza dei raggi in un numero finito di punti.
- **La probabilita' di morire di una persona di sesso maschile di 50 anni da oggi al 2070.**
Serve per calcolare le tabelle assicurative, ma non posso indicare il valore preciso della probabilita' di morte istante per istante.

Quelli sopra sono tutti esempi di probabilita' continua; in alcuni casi si puo' ovviare, come nel caso delle assicurazioni, dividendo l'intervallo in anni, pero' e' un'approssimazione; la probabilita' di morte di una persona a gennaio sara' diversa dalla probabilita' per la stessa persona a dicembre dello stesso anno.

Consideriamo ancora la caduta di un oggetto su un piano determinato: come posso esprimere la probabilita' di impatto in un punto se un punto non ha dimensione? Allora dovro' sostituire al concetto di punto il solito concetto di intervallo per poter trovare una probabilita' effettiva; e' lo stesso **ragionamento** che ci ha portato a costruire l'analisi matematica basandola sul concetto di intervallo. Se considero un intervallo, anche se infinitesimo, allora per esso potro' parlare della probabilita' di impatto con l'oggetto che cade.

Per sapere come comportarci intuitivamente riferiamoci ad un esempio classico: **lanciando una moneta ho due possibilita': o testa o croce entrambe con probabilita' $p = \frac{1}{2}$** Abbiamo gia' studiato questo caso e visto la distribuzione di questo fenomeno **vedi l'esempio**

Se aumentiamo il numero delle prove avremo che al posto dei rettangoli avremo dei rettangoli sempre piu' snelli sino ad arrivare a basi infinitesime e quindi ad avere, per i valori delle probabilita', una curva indistinguibile da una curva continua.



Dovremo quindi di utilizzare l'analisi matematica e lo studio di funzioni, inoltre, siccome le probabilita' saranno legate alle aree di parti delle curve, dovremo conoscere bene soprattutto il calcolo degli integrali definiti.

b. Variabile aleatoria continua

In pratica, se la variabile aleatoria e' continua allora la probabilita' varia in modo continuo e noi cercheremo di rappresentare tale probabilita' con una funzione continua in un dato intervallo.

Anche qui sarebbe meglio parlare di funzione aleatoria piu' che di variabile aleatoria, ma ormai, come ho gia' detto, il termine "variabile" e' entrato nel linguaggio comune.

Definizione:

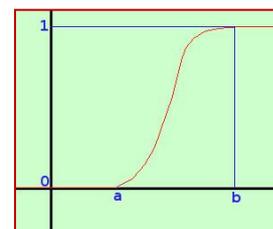
La variabile aleatoria continua e' una variabile casuale X che assume tutti i valori in un dato intervallo $[a ; b]$

c. Funzione di ripartizione

Particolare importanza, nel caso continuo, ha la funzione di ripartizione (somma di tutte le probabilita' precedenti una probabilita' data).

In generale, data la probabilita' $P(x)$ nell'intervallo chiuso $[a;b]$ potremo definire come funzione di ripartizione su \mathfrak{R} una funzione $y = F(x)$ tale che:

- Sia definita per ogni valore di x in \mathfrak{R}
- Assuma valori compresi fra **0** ed **1** essendo:
 $F(x) = 0$ per $x \leq a$
 $F(x) = 1$ per $x \geq b$
- La funzione e' monotona non decrescente (cioe' o cresce o si mantiene costante in ogni intervallo considerato).



La funzione di ripartizione servira' in quei problemi che coinvolgano i segni di \leq e \geq

Per semplicita' consideriamo solamente casi in cui la variabile aleatoria e' continua (generalmente e' cosi' ma si hanno delle eccezioni che non consideriamo).

d. Funzione di densita'

1) Introduzione

In pratica, considerare la funzione densita' di probabilita' equivale a considerare il dominio della variabile aleatoria come suddiviso in intervalli infinitesimi e quindi ad introdurre le derivate nel calcolo delle probabilita'. Vedremo che:

la **funzione densita' di probabilita'** e' definita come la derivata della **funzione di ripartizione** e, viceversa,

la **funzione di ripartizione** e' l'integrale della **funzione densita' di probabilita'**.

Per introdurre la funzione densita' di probabilita' dovremo considerare una **variazione di probabilita'**; introdurremo il concetto di variazione media di probabilita' sulla funzione di ripartizione.

2) Densita' media

Sia X una variabile casuale continua che assuma tutti i valori reali compresi nell'intervallo $[a;b]$.

Sia $F(x)$ una funzione che indica che la variabile casuale assume valori inferiori od uguali ad x (in pratica una funzione che equivalga ad una parte della funzione di ripartizione partendo da sinistra. Nella funzione a fianco e' la parte colorata in azzurro):

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

Con questa definizione avremo allora che:

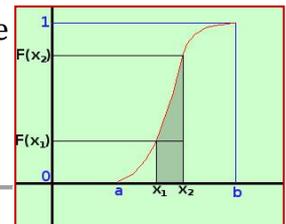
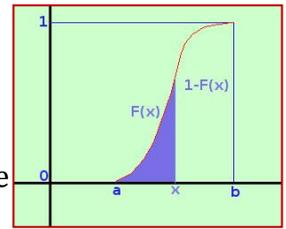
$1-F(x)$ e' la probabilita' contraria, cioe' la probabilita' che la variabile casuale X assuma un valore maggiore di x cioe' quello che resta togliendo la parte azzurra

$F(x_1)$ e' la probabilita' che la variabile casuale assuma un valore minore od uguale ad x_1

$F(x_2)$ e' la probabilita' che la variabile casuale assuma un valore minore od uguale ad x_2

$F(x_2)-F(x_1)$ **variazione della funzione di ripartizione** e' la probabilita' che la variabile casuale assuma un valore compreso tra x_1 ed x_2 con x_1 escluso $x_1 < x \leq x_2$

Nella figura a fianco la parte colorata in grigio



Come ti starai rendendo conto cerchiamo di metterci nell'ottica del concetto di derivata.

Adesso definiamo la **densita' media di probabilita'** come il rapporto fra $F(x_2)-F(x_1)$ ed $x_2 - x_1$, cioe' la variazione della $F(x)$ rispetto alla variazione della x :

$$\text{Densita' media di probabilita'} = \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Questo indica come la probabilita' si distribuisce nell'intervallo considerato nell'ipotesi che la distribuzione avvenga in modo uniforme (senza salti). Naturalmente, per poter essere un'indicazione significativa dovremo considerare un intervallo abbastanza piccolo $[x; x + \Delta x]$; in tal modo otterremo la velocita' di variazione della $F(x)$ al variare della x (velocita' all'istante):

$$\text{Densità media di probabilita'} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

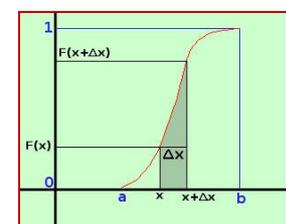
Da notare che e' lo stesso ragionamento che si fa in fisica per calcolare la velocita' media, la velocita' istantanea e quindi la velocita' come **funzione derivata dello spazio rispetto al tempo**.

3) Funzione di densita' di probabilita'

Se ora passiamo al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ avremo la **definizione di derivata**:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

La funzione $f(x) = F'(x)$ si chiama **densita' di probabilita'** o semplicemente **funzione di densita'**.



Da notare che la funzione di densita' $f(x)$ non esprime una probabilita' (es. la tangente alla curva in figura puo' anche avere **coefficiente angolare** superiore ad 1), pero' essa serve a calcolare una probabilita'; se considero il **differenziale** di $F(x)$:

$$dF(x) = F'(x) = f(x)dx$$

esso coincide con la derivata della funzione a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$dF(x) = F'(x) + \varepsilon x = f(x)dx$$

e quindi, essendo $f(x)dx$ il prodotto fra la funzione densita' ed il differenziale dx , allora **$f(x)dx$ e' la probabilita' che la variabile casuale assuma un valore compreso nell'intervallo infinitesimo x ed $x + dx$** a meno di infinitesimi di ordine superiore a dx .

Osservazione:

Come ho gia' detto la funzione di densita' non esprime una probabilita'; infatti se hai una funzione continua come fai ad assegnare ad un punto una probabilita'?

Prendiamo ad esempio la caduta di un oggetto su un piano determinato: come posso esprimere la probabilita' di impatto in un punto se un punto non ha dimensione?

Allora dovro' sostituire al concetto di punto il solito concetto di intervallo per poter trovare una probabilita' effettiva: e' lo stesso **ragionamento** che ci ha portato a costruire l'analisi matematica basandola sul concetto di intervallo.

Se considero un intervallo, anche se infinitesimo, allora per esso posso parlare della probabilita' di impatto con l'oggetto che cade.

Nel nostro caso, per poter parlare di probabilita' consideriamo la funzione di ripartizione e la pensiamo composta da intervalli infinitesimi di base dx e di altezza $f(x)$.

Come conseguenza avremo che la densita' di probabilita' e' legata all'area di questi rettangoli [base dx ed altezza $f(x)$].

Cioe' la derivata della funzione di ripartizione equivale (a meno di infinitesimi di ordine superiore) al differenziale della funzione $F(x)$:

$$F'(x)dx = dF(x) = f(x)dx$$

Infatti dall'uguaglianza algebrica:

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

Facendo il minimo comune multiplo dx ottengo:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{F'(x) dx}{dx} = \frac{f(x) dx}{dx}$$

e moltiplicando tutte le espressioni per dx (cioe' togliendo i denominatori)

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

Cioe', in generale, l'incremento infinitesimo di una funzione e' uguale alla derivata della funzione stessa moltiplicata per il relativo incremento infinitesimo della x (a meno di infinitesimi di ordine superiore e quindi da non considerare perche' trascurabili).

Intuitivamente $F'(x)$ e' la derivata della funzione calcolate prendendo due punti sul grafico e facendo avvicinare il secondo punto al primo mentre $dF(x)$ e' il differenziale che viene calcolato incrementando di un intervallino dx la tangente al grafico **Ripassa il differenziale**.

e. Relazioni notevoli

Ora possiamo definire la funzione di ripartizione su \mathcal{R} come:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq a \\ \int_a^x f(t) dt & \text{se } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{se } t \geq b \end{cases}$$

ed abbiamo che vale sempre:

$$\int_a^b f(t) dt = 1$$

Esempio:

Determinare il valore della costante k in modo che la funzione $y = kx$ sia la funzione densita' di una variabile casuale continua che assume tutti i valori compresi nell'intervallo $[0;4]$.

Per calcolare il valore di k bastera' trovare l'integrale definito da 0 a 4 della funzione densita' e porre il risultato uguale ad 1 (probabilita' certa):

$$\int_a^x f(t)dt = \int_0^4 kx dx = | \frac{1}{2}kx^2 |_0^4 = 8k - 0 = 8k$$

Pongo il valore dell'integrale uguale ad 1:

$$8k = 1$$

$$k = 1/8$$

Quindi la funzione densita' e':

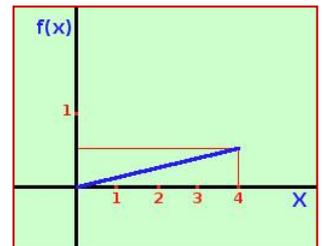
$$f(x) = \frac{x}{8}$$

Mentre la funzione di ripartizione e' il risultato dell'integrale cioe':

$$F(x) = \frac{x^2}{4}$$

Possiamo dare una rappresentazione della variabile casuale continua ponendo in ascissa i valori della variabile aleatoria X e in ordinata i valori $f(x)$ della funzione densita'; da notare che l'area sottesa fra $f(x)$ e l'asse delle ascisse vale sempre 1.

Nel grafico a destra, per ragioni di rappresentazione, ho usato unita' di misura diverse per ascisse ed ordinate.



La variabile casuale continua viene anche rappresentata graficamente prendendo in ascissa i valori X della variabile aleatoria ed in ordinata i valori $F(x)$ della funzione di ripartizione.

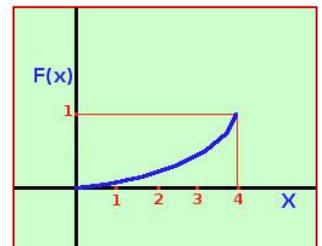
A destra un esempio dal nostro solito esercizio:

Variabile aleatoria X continua sull'intervallo $[0;4]$ con funzione di ripartizione:

$$F(x) = \frac{x^2}{4}$$

E' una parte di parabola con vertice l'origine e concavita' verso l'alto.

Nota



Inoltre se abbiamo:

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)dt \quad e \quad F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)dt \quad \text{con } x_1 \leq x_2$$

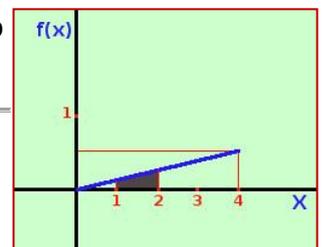
Ne segue:

$$\Pr (x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Cioe':

La probabilita' che la variabile aleatoria X assuma un valore compreso fra x_1 ed x_2 e' dato dall'integrale definito della funzione densita' calcolato da x_1 ad x_2 .

Quindi, d'ora in avanti, per calcolare una probabilita' in un intervallo potremo calcolare un area mediante il calcolo integrale.



Ad esempio calcoliamo ora la probabilita' che la variabile aleatoria assuma valore tra 1 e 2:

$$\int_1^2 \frac{1}{8}x dx = | 1/16 x^2 |_1^2 = 4/16 - 1/16 = 3/16$$

E' rappresentata in figura dall'area di colore grigio-scuro.

f. Valore medio

Passiamo ora a definire per la variabile aleatoria continua il concetto di valore medio

Ricordo che il **valore medio per la variabile discreta** e' uguale alla somma dei prodotti dei valori della variabile per la rispettiva probabilita', e quindi, passando al caso continuo, la somma di tali prodotti deve diventare l'integrale; infatti l'integrale e' il **limite delle somme dei rettangolini facendone diventare infinitesime le basi dx** ed il simbolo di integrale e' la *s* medioevale che indica la somma .

Consideriamo la variabile casuale continua **X** che assuma tutti i valori nell'intervallo **[a;b]** e sia **f(x)** la sua funzione densita' e **F(x)** la sua funzione di ripartizione.

La variabile casuale **X** assume (a meno di infinitesimi) il valore **x** nell'intervallo **[a;b]** con probabilita' **dF(x) = f(x)dx**.

Allora il valore medio **M(X)** sara' dato dall'integrale sull'intervallo **[a;b]** del prodotto dei valori **x** della variabile aleatoria per la rispettiva probabilita' **dF(x) = f(x)dx**:

$$M(X) = \int_a^b x dF(x) = \int_a^b x f(x) dx$$

Come esempio calcoliamo il valore medio per la funzione densita' trovata nell'esercizio della pagina precedente.

Abbiamo la funzione densita' nell'intervallo **[0;4]** :

$$y = \frac{x}{8}$$

Calcoliamo il valore medio **m = M(X)** della variabile aleatoria.

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{8} x^2 dx = [1/24 x^3]_0^4 = 64/24 - 0 = 8/3.$$

g. Varianza

Per la varianza consideriamo al solito lo scarto dal valore medio e poi facciamo la somma dei quadrati degli scarti (ricordo che l'integrale e' il limite della somma):

Variabile casuale: **X**

Valore medio: **m = M(X) = \int_a^b x f(x) dx**

Scarto: **X - m**

Scarto al quadrato: **(X - m)²**

Anche gli scarti sono variabili casuali e quindi dobbiamo considerare la probabilita' solita, cioe' moltiplicarli per **dF(x)**:

Valore medio dello scarto: **M(X - m) = \int_a^b (x - m) dF(x) = \int_a^b (x - m) f(x) dx =**

Varianza: **\sigma^2(X) = M(X - m)^2 = \int_a^b (x - m)^2 dF(x) = \int_a^b (x - m)^2 f(x) dx =**

Per il calcolo ricordiamo che vale la formula che **abbiamo gia' visto**:

$$\sigma^2(X) = M(X - m)^2 = M(X)^2 - m^2 = M(X^2) - [M(X)]^2$$

cioe'
$$\sigma^2(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - \left[\int_a^b x f(x) dx \right]^2$$

Calcoliamo la varianza per la variabile aleatoria che prende valori nell'intervallo **[0;4]** con funzione densita':

$$y = \frac{x}{8}$$

Ricordando che il valore medio, trovato nella pagina precedente e' **8/3** :

$$\sigma^2(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - \left[\int_a^b x f(x) dx \right]^2$$

$$\sigma^2(X) = \int_0^4 x^2 \cdot 1/8 dx - m^2 = \int_0^4 1/8 x^3 dx - (8/3)^2 = [1/32 x^4]_0^4 - 64/9 = 256/32 - 0 - 64/9 = 8 - 64/9 = 8/9.$$

h. Scarto quadratico medio

Ora per ottenere lo scarto quadratico medio σ bastera' eseguire l'operazione di estrazione di radice della varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Calcoliamo lo scarto quadratico medio sempre per il solito esempio: variabile aleatoria X che prende valori nell'intervallo $[0;4]$ con funzione densita':

$$y = \frac{x}{8}$$

Ricordando che il valore della varianza, trovato nella pagina precedente, e' $8/9$ abbiamo:

$$\sigma(X) = \sqrt{8/9} \cong 0,9428.$$

i. Distribuzioni di probabilita' continue

Per concludere facciamo qualche cenno sulle principali distribuzioni di probabilita' per una variabile aleatoria continua

- [Distribuzione uniforme](#)
- [Distribuzione esponenziale](#)
- [Distribuzione normale \(legge di Gauss\)](#)
- [Relazione fra distribuzione binomiale e normale](#)
- [Distribuzione normale standardizzata](#)

1) [Distribuzione uniforme](#)

Piu' che un'effettiva probabilita' si tratta di una probabilita' "didattica" o meglio di un tipo di probabilita' che ci permette di capire meglio tutto l'impianto

Consideriamo la variabile casuale X che assume tutti i valori nell'intervallo $[a;b]$ con funzione densita':

$$f(x) = k$$

Essendo la probabilita' totale su $[a;b]$ uguale ad 1 possiamo trovare il valore di k impostando l'equazione:

$$\int_a^b k dx = 1$$

[l'integrale e' immediato](#) e otteniamo:

$$|kx|_a^b = 1$$

[risolvendo](#):

$$kb - ka = 1$$

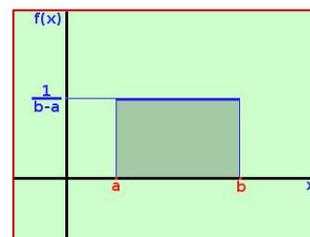
raccolgo k :

$$k(b-a) = 1$$

$$k = \frac{1}{b-a}$$

Quindi la nostra funzione densita' e':

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



Infine calcoliamo lo **scarto quadratico medio**:

Basta applicare la radice al risultato precedente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b+a)^2}{12}}$$

Quindi:

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \cong 0,288675 (b-a)$$

2) Distribuzione esponenziale

Anche questa e' interessante soprattutto per i calcoli che ci introducono poi alla distribuzione piu' "gettonata" (legge di Gauss)

Consideriamo la variabile casuale **X** che assume tutti i valori nell'intervallo **[0;+∞]** con funzione densita':

$$f(x) = ke^{-\alpha x}$$

con **α** valore dato e **k** valore da determinare. Essendo la probabilita' totale su **[0;+∞]** uguale ad 1 possiamo trovare il valore di **k** impostando l'equazione:

$$\int_0^{+\infty} ke^{-\alpha x} dx = 1$$

Essendo **k** una costante la estraggo dal segno di integrale:

$$k \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = 1$$

e' un integrale del tipo $\int e^{f(x)} f'(x) dx$ con $f(x) = -\alpha x$.

Siccome $f'(x) = -\alpha$ allora moltiplichiamo e dividiamo tutto per $-\alpha$ in modo da non variare il valore ma avere la derivata della funzione al numeratore:

$$k \int_0^{+\infty} \frac{-\alpha}{-\alpha} e^{-\alpha x} dx = 1$$

Essendo α un valore dato posso estrarre il $-\alpha$ del denominatore dal segno di integrale, quello al numeratore mi serve per avere la derivata dell'esponente:

$$\frac{k}{-\alpha} \int_0^{+\infty} -\alpha e^{-\alpha x} dx = 1$$

Adesso, essendo $-\alpha$ la derivata dell'esponente $-\alpha x$, e' un integrale immediato che trovi nella tabella degli [integrali di funzione di funzione](#) e, come integrale indefinito vale $e^{-\alpha x}$, quindi ottengo:

$$\frac{k}{-\alpha} |e^{-\alpha x}|_0^{+\infty} = 1$$

Adesso devo sostituire dentro il simbolo differenza prima alla x il valore $+\infty$ poi devo sostituire 0 e sottrarlo:

$$\frac{k}{-\alpha} (e^{-\alpha(+\infty)} - e^{-\alpha \cdot 0}) = 1$$

$-\alpha$ per $+\infty$ vale $-\infty$; ho $e^{-\infty} = 0$

$-\alpha$ per 0 vale zero; ho $e^0 = 1$

$$\frac{k}{-\alpha} (0-1) = 1$$

Eseguo l'operazione poi moltiplico i segni:

$$\frac{k}{-\alpha} = 1$$

$$k = \alpha$$

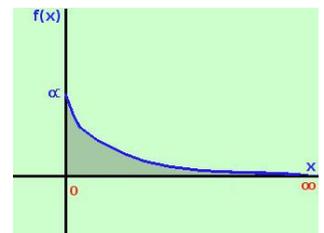
Ed otteniamo:

$$k = \alpha$$

Quindi la nostra funzione densita' e':

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

Il grafico di tale funzione, essendo una funzione di tipo esponenziale con esponente



negativo, parte dal valore α sull'asse y (infatti ponendo $x=0$ abbiamo $y=\alpha e^0=\alpha \cdot 1=\alpha$) e si avvicina asintoticamente all'asse delle x (per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo $y \rightarrow \alpha e^{-\infty}=\alpha \cdot 0=0$).

Otterremo la funzione di ripartizione calcolando l'integrale da 0 a x della funzione densita':

$$F(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt =$$

E' un integrale del tipo:

$$\int e^{f(t)} f'(t) dt \text{ con } f(t) = -\alpha t$$

Siccome $f'(t) = -\alpha$ allora scriviamo $-(-\alpha)$ in modo da non variare il valore ma avere la derivata della funzione al numeratore:

$$F(x) = \int_0^x -(-\alpha) e^{-\alpha t} dt =$$

ora posso estrarre il segno -dal segno di integrale in modo da avere al numeratore esattamente la derivata dell'esponente:

$$= - \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt =$$

adesso, essendo $-\alpha$ la derivata dell'esponente $-\alpha t$, abbiamo un integrale immediato che trovi nella tabella degli [integrali di funzione di funzione](#) e, come integrale indefinito vale $e^{-\alpha x}$, quindi ottengo:

$$= - \left[e^{-\alpha t} \right]_0^x =$$

Adesso devo sostituire dentro il simbolo differenza prima alla t il valore x poi devo sostituire 0 e sottrarlo:

$$= - (e^{-\alpha x} - e^{-\alpha \cdot 0}) =$$

$$-\alpha \text{ per } 0 \text{ vale zero; ho } e^0 = 1$$

$$= - (e^{-\alpha x} - 1) =$$

Moltiplico per il segno meno (faccio cadere la parentesi):

$$= -e^{-\alpha x} + 1 =$$

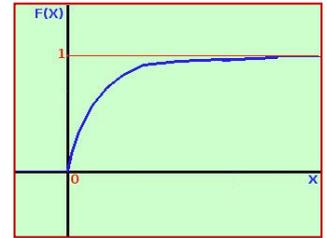
Scrivo prima il termine positivo:

$$= 1 - e^{-\alpha x}$$

Quindi abbiamo la funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

A destra la sua rappresentazione grafica e sotto lo studio intuitivo della funzione.



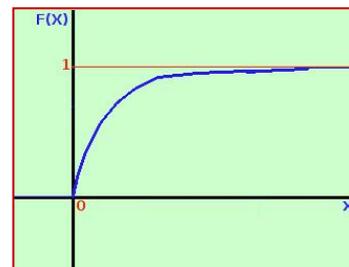
Studiamo la funzione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

seguiamo alcuni punti dello schema proposto in analisi

- Determinazione del campo di esistenza.
Nel nostro caso **il campo di esistenza e' tutto \mathbb{R}** perche' per $x \leq 0$ la nostra funzione vale sempre zero e quindi e' sempre definita; anche per $x > 0$ e' sempre definita (cioe' per ogni valore reale sostituito ad x la mia funzione assume un valore reale)
- Determinazione del tipo di funzione.
E' una funzione formata da due diverse funzioni:
per $x \leq 0$ e' una funzione costante (e quindi **il grafico si riduce all'asse negativo delle x**) e questa non c'e' bisogno di studiarla
per $x > 0$ invece e' la differenza fra una funzione costante ed una di tipo esponenziale (d'ora in avanti ci limiteremo a studiare solamente il ramo della funzione $x > 0$)

- Intersezione con gli assi.
Se considero l'asse y, cioè pongo $x=0$ allora la funzione vale
 $y = 1 - e^{-\alpha x} = 1 - e^{-\alpha(0)} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$
Quindi **$O \equiv (0;0)$ e' un punto della funzione**
- Valori agli estremi del campo di esistenza e asintoto orizzontale.
I punti in questione sono dati dai tre valori per le x
 $x = -\infty$ in tal caso la funzione vale 0
 $x = 0$ abbiamo già visto che allora $y=0$
 $x = +\infty$ in tal caso abbiamo
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - e^{-\alpha(x)}] \rightarrow 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$
allora **$y = 1$ e' l'asintoto orizzontale** (retta a cui tende la funzione senza mai raggiungerla)
- Positività e negatività, crescita e decrescenza.
Considero la funzione:
 $y = 1 - e^{-\alpha x}$
e ne faccio la derivata:
 $y' = 0 + \alpha e^{-\alpha x}$
 $y' = \alpha e^{-\alpha x}$
 Y' e' sempre positiva perché α e' un termine positivo e l'esponenziale e' definito sempre positivo; essendo la derivata prima sempre positiva **la funzione e' sempre crescente.**
- Derivata seconda e concavità.
Faccio la derivata seconda:
 $y'' = -\alpha^2 e^{-\alpha x}$
Essendovi il meno davanti ad un quadrato la derivata e' sempre negativa, quindi la concavità e' rivolta verso il basso



Calcoliamo ora il **valore medio**:

$$M(X) = \int_0^{+\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx =$$

Questo e' un **integrale per parti** che ha soluzione:

$$M(X) = -\alpha \left| \frac{x e^{-\alpha x}}{\alpha} \right|_0^{+\infty} - \left| \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right|_0^{+\infty}$$

$$M(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Ecco i calcoli per giungere al risultato:

Risolvere l'integrale:

$$M(X) = \int_0^{+\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx =$$

Risolviamolo intanto come integrale indefinito, poi, sul risultato faremo le differenze da $+\infty$ a 0

E' un integrale da risolvere **per parti** considerando x come il termine di cui conosciamo la derivata ed $\alpha e^{-\alpha x}$ come il termine di cui conosciamo l'integrale: la formula mnemonica e':

$$\int fg = f \int g - \int [f' g]$$

Abbiamo:

$$f = x$$

$$g = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$f' = 1$$

$$\int g = \int \alpha e^{-\alpha x} = -e^{-\alpha x} \quad \text{vedi lo sviluppo nella nota precedente}$$

Applico la formula:

$$\int_0^{+\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = x \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx - \left[\int_0^{+\infty} 1 \int \alpha e^{-\alpha x} dx \right] dx =$$

$$= x(-e^{-\alpha x}) - \left[\int_0^{+\infty} (-e^{-\alpha x}) dx \right] dx =$$

eseguo i calcoli

$$= -x e^{-\alpha x} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \text{anche questo ultimo integrale lo abbiamo già sviluppato}$$

$$= -x e^{-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$$

Ora torniamo all'integrale definito:

$$\int_0^{+\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = \left[-x e^{-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right]_0^{+\infty} =$$

sostituendo $+\infty$ al primo termine $-x \cdot e^{-\alpha x}$ ottengo la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ che posso risolvere applicando la [regola di De l'Hôpital](#)

Basta fare le derivate dei fattori e sostituire ad $x + \infty$

$$-1 \cdot (-\alpha e^{-\alpha x}) = \alpha e^{-\alpha x} = \alpha e^{-\alpha(+\infty)} = \alpha e^{-\infty} = 0$$

sostituendo ad x il simbolo $+\infty$ ottengo 0, quindi ho:

$$= 0 + 0e^0 - \frac{e^{-\infty}}{\alpha} + \frac{e^0}{\alpha} = 0 + 0 - 0 + \frac{1}{\alpha}$$

Quindi:

$$M(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Calcoliamo ancora la [varianza](#):

Prima calcolo il valore medio del quadrato della variabile aleatoria:

$$M(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx$$

Anche questo e' un [integrale per parti](#) che ha soluzione:

$$M(X^2) = \frac{2}{\alpha^2}$$

Ecco i calcoli per risolvere l'integrale:

Risolvere l'integrale

$$M(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx$$

Risolviamolo intanto come integrale indefinito, poi, sul risultato faremo le differenze da $+\infty$ a 0

E' un integrale da risolvere [per parti](#) considerando x^2 come il termine di cui conosciamo la derivata ed $\alpha e^{-\alpha x}$ come il termine di cui conosciamo l'integrale: la formula mnemonica e':

$$\int fg = f \int g - \int [f' g]$$

abbiamo

$$f = x^2$$

$$g = \alpha e^{-\alpha x}$$

$$f' = 2x$$

$$\int g = \int \alpha e^{-\alpha x} = -e^{-\alpha x} \quad \text{vedi lo sviluppo in una nota precedente}$$

Applico la formula:

$$\int_0^{+\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = x \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx - \left[\int_0^{+\infty} 1 \int \alpha e^{-\alpha x} dx \right] dx =$$

$$= x^2 (-e^{-\alpha x}) - \left[\int 2x (-e^{-\alpha x}) dx \right] =$$

Eseguo i calcoli

$$= -x^2 e^{-\alpha x} + 2 \int x e^{-\alpha x} dx = \text{ora lo scrivo in modo da avere la derivata dell'esponente dentro il segno di integrale}$$

$$= -x^2 e^{-\alpha x} + 2/\alpha \int x \alpha e^{-\alpha x} dx = \text{questo ultimo integrale lo abbiamo gia' sviluppato per calcolare il valore medio}$$

$$= -x^2 e^{-\alpha x} + \frac{2}{\alpha} \left(-x e^{-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right) =$$

$$= -x^2 e^{-\alpha x} - \frac{2x e^{-\alpha x}}{\alpha} - \frac{2 e^{-\alpha x}}{\alpha^2}$$

Ora torniamo all'integrale definito:

$$\int_0^{+\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = \left[-x^2 e^{-\alpha x} - \frac{2x e^{-\alpha x}}{\alpha} - \frac{2 e^{-\alpha x}}{\alpha^2} \right]_0^{+\infty} =$$

sostituendo $+\infty$ ai primi due termini $-x \cdot e^{-\alpha x}$ e $-x \cdot e^{-\alpha x}$ ottengo la forma indeterminata $\infty \cdot 0$ che posso risolvere applicando la [regola di De l'Hôpital](#) due volte al primo termine ed una volta al secondo.

Basta fare le derivate dei fattori e sostituire ad x il simbolo $+\infty$

Primo termine:

applico una prima volta la regola $2x \cdot (-\alpha e^{-\alpha x})$ ed ho ancora una forma indeterminata $\infty \cdot 0$

applico la regola una seconda volta $2 \cdot (\alpha^2 e^{-\alpha x}) = 2 \cdot [\alpha^2 e^{-\alpha(+\infty)}] = 2 \cdot (\alpha^2 e^{-\infty}) = 2 \cdot 0 = 0$ ed ora il termine vale 0

Per il secondo termine basta applicare la regola una volta sola $-2 \cdot (-\alpha e^{-\alpha x}) = -2\alpha e^{-\alpha x} = -2\alpha e^{-\alpha(+\infty)} = -2\alpha e^{-\infty} = 0$

Quindi ho, sostituendo ad ogni termine prima $+\infty$ e poi 0:

$$= 0 + 0e^0 - \frac{2 \cdot 0}{\alpha} + \frac{2 \cdot 0e^0}{\alpha} - \frac{e^{-\infty}}{\alpha^2} + \frac{2e^0}{\alpha^2} = 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + \frac{2}{\alpha^2}$$

quindi

$$M(X^2) = \frac{2}{\alpha^2}$$

Adesso, per trovare la varianza da questo valore sottraggo il quadrato del valore medio:

$$\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

Infine calcoliamo lo **scarto quadratico medio**.

Basta applicare la radice al risultato precedente; otteniamo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}$$

Quindi, nella variabile casuale con distribuzione esponenziale lo scarto quadratico medio coincide con il valore medio.

3) Distribuzione normale (Legge di Gauss)

E' di gran lunga la piu' importante, anche perche' si ritrova quasi ovunque, dalla distribuzione delle particelle alla teoria degli errori.

- **Gaussiana come limite (intuitivo) della variabile binomiale**
- **La variabile casuale con distribuzione gaussiana**
- **Studio della variabile casuale standardizzata**
- **Applicazioni pratiche della variabile gaussiana**

a) Gaussiana come limite (intuitivo) della variabile binomiale

Riprendiamo un esempio gia' accennato.

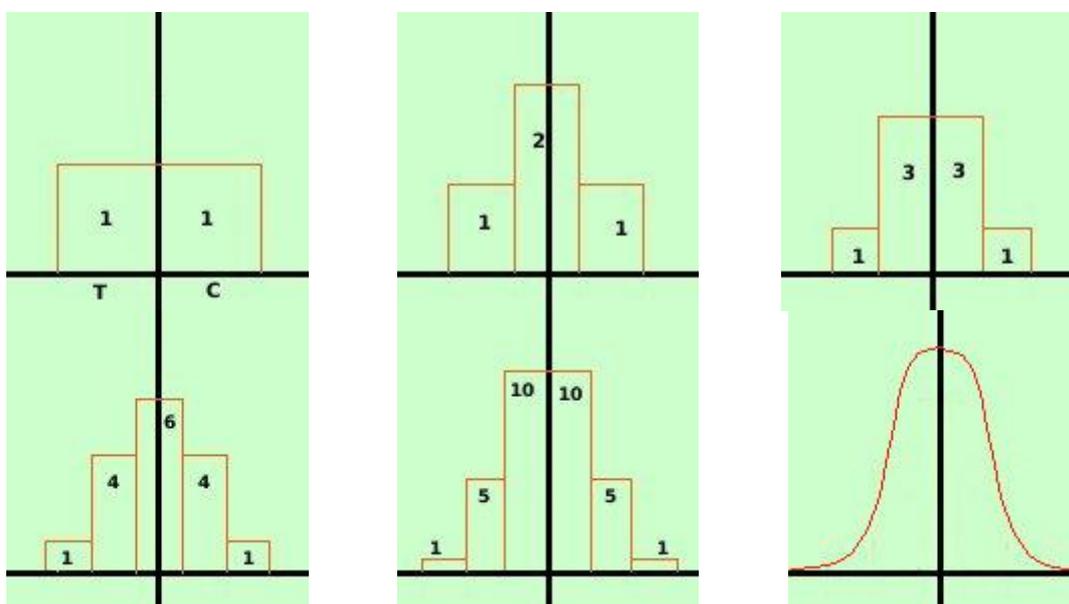
Consideriamo ancora la variabile gaussiana discreta sull'esempio del lancio di una moneta:

Lanciando una moneta consideriamo la probabilita' che esca testa: ho la probabilita' $p = \frac{1}{2}$ e la probabilita' contraria $q = \frac{1}{2}$

All'aumentare del numero delle prove avremo che successivi rettangoli obbediranno alla legge del triangolo di tartaglia, essendo legati alla regola della potenza del binomio:

			1	1					
			1	2	1				
			1	3	3	1			
			1	4	6	4	1		
			1	5	10	10	5	1	
			1	6	15	20	15	6	1
.....									

Quindi, poiche' l'area sottesa deve sempre valere 1 (somma di tutte le probabilita'), al posto dei rettangoli avremo dei rettangoli sempre piu' snelli sino ad arrivare a basi infinitesime e quindi ad avere, per i valori delle probabilita', una curva indistinguibile da una curva continua.



Tale curva sara' detta anche curva a campana di Gauss e sara' del tipo $y = ke^{-x^2}$ con k valore dato.

La dimostrazione analitica di come si ricavi la formula precisa trascende i limiti dei programmi delle scuole medie superiori, quindi, nelle prossime pagine, ci accontenteremo di prendere la formula finale e di fare alcune osservazioni.

b) La variabile casuale con distribuzione gaussiana

E' la variabile casuale continua la cui funzione densita' e':

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

essendo:

σ lo scarto quadratico medio

σ^2 la varianza

m il valore medio

Nella prossima pagina faremo lo studio di questo tipo di funzione, pero' per renderla un poco piu' "umana" (alla Fantozzi) cerchiamo di semplificarla.

Il processo è chiamato "standardizzazione" della variabile casuale.

Poniamo $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$

otteniamo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

c) Studio della variabile casuale standardizzata

Come esercizio, anche per ripassare un po' di Analisi, e per ricavarne le proprietà studiamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Seguiamo lo **schema** che abbiamo visto in Analisi.

Per i nostri calcoli sappiamo che la costante $1/\sqrt{(2\pi)}$ vale circa **0,3989**

- **Determinazione del campo di esistenza.**

Il campo di esistenza è tutto \mathfrak{R}

- **Determinazione del tipo di funzione.**

Intanto posso dire che è una funzione pari perché se sostituisco x con $-x$ non cambia niente $(-x)^2 = x^2$, quindi la funzione sarà:

simmetrica rispetto all'asse delle y

- **Intersezioni con gli assi.**

Vediamo se esistono intersezioni con l'asse y .

Faccio il sistema fra la funzione e l'asse y :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}0^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

essendo $e^0 = 1$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cong 0,3989 \\ x = 0 \end{cases}$$

Quindi la curva taglia l'asse delle y nel punto:

$$A \equiv (0; 1/\sqrt{(2\pi)}) \cong (0; 0,3989)$$

Vediamo ora se esistono intersezioni con l'asse x :

Faccio il sistema fra la funzione e l'asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Essendo $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ un esponenziale sarà sempre maggiore di zero, ed essendo $1/\sqrt{(2\pi)}$ una costante allora il termine non sarà mai zero, quindi:

La curva non taglia l'asse delle x

- **Valori agli estremi del campo di esistenza.**

Siccome il campo di esistenza va da $-\infty$ a $+\infty$ allora dovremo trovare tali valori con gli asintoti

- **Positività e negatività.**

Risolvo la disequazione:

$$1/\sqrt{(2\pi)} e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$$

essendo $1/\sqrt{2\pi}$ una costante positiva basta risolvere:

$$e^{-1/2x^2} > 0$$

Questo essendo un esponenziale e' sempre positivo.

La funzione e' sempre positiva (il grafico sara' tutto sopra l'asse delle x)

- **Determinazione degli asintoti.**

Non possono esistere asintoti verticali (la funzione non diventa infinita per valori finiti di x).

Ricerca di eventuali asintoti orizzontali od obliqui:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/\sqrt{2\pi} e^{-1/2x^2} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{2\pi} e^{-1/2x^2} = e^{-\infty} = 0$$

Quindi l'asse delle x e' un asintoto orizzontale:

y = 0 asintoto orizzontale

ed essendo la curva sempre positiva la curva si avvicina all'asintoto da sopra.

- **Determinazione della derivata prima.**

Eseguiamo la derivata prima:

$1/\sqrt{2\pi}$ e' una costante quindi resta davanti al risultato

$e^{-1/2x^2}$ e' una funzione (esponenziale) di funzione (esponente $-1/2x^2$)

derivata dell'esponenziale $e^{-1/2x^2}$

derivata dell'esponente $-1/2 \cdot 2x = -x$

Quindi ho la derivata:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

- **Crescenza e decrescenza.**

Poniamo la derivata prima maggiore di zero per vedere dove e' positiva (funzione crescente) o negativa (funzione decrescente):

$$\frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$$

Essendo $1/\sqrt{2\pi}$ una costante positiva posso scrivere:

$$-x e^{-1/2x^2} > 0$$

L'esponenziale e' sempre positivo, quindi scrivo:

$$-x > 0$$

ed ottengo:

$$x < 0$$

La derivata e' positiva per $x < 0$ ed e' negativa per $x > 0$, quindi:

La funzione e' crescente per $x < 0$ ed e' decrescente per $x > 0$

- **Determinazione dei massimi e minimi**

Senza risolvere equazioni, essendo la funzione crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$, allora il punto corrispondente ad $x=0$ e' un massimo.

Corrisponde al punto **A** di intersezione con l'asse y:

$$\mathbf{A = M \equiv (0; 1/\sqrt{2\pi}) \approx (0; 0,3989)}$$

- **Determinazione della derivata seconda**

Eseguiamo la derivata della derivata prima.

non considerando la costante $1/\sqrt{2\pi}$ e' un **prodotto di funzioni** $-x$ ed $e^{-1/2x^2}$, quindi

$$y'' = 1/\sqrt{2\pi} [-1 \cdot e^{-1/2x^2} - x \cdot (-x e^{-1/2x^2})]$$

$$y'' = 1/\sqrt{2\pi} [-1 \cdot e^{-1/2x^2} + x^2 e^{-1/2x^2}]$$

$$y'' = 1/\sqrt{2\pi} [e^{-1/2x^2} (x^2 - 1)]$$

ottengo:

$$y'' = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}$$

- **Concavita' convessita' e flessi**

Pongo la derivata seconda uguale a zero:

$$\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2} = 0$$

Essendo $\sqrt{2\pi}$ una costante ed essendo l'esponenziale per definizione sempre positivo la mia equazione si riduce a

$$x^2 - 1 = 0$$

Ottingo quindi due soluzioni:

$$x = -1 \text{ ed } x = 1$$

Ora studio il segno della mia funzione:

$$\frac{x^2 - 1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-1/2x^2} > 0$$

Anche qui, essendo $\sqrt{(2\pi)}$ una costante ed essendo l'esponenziale per definizione sempre positivo la mia disequazione si riduce a:

$$x^2 - 1 > 0$$

essendo le soluzioni -1 ed 1 la mia disequazione e' verificata per **valori esterni**

_____	-1	_____	+1	_____
+++++	0	-----	0	+++++

Quindi posso dire che:

Da $-\infty$ a -1 la concavita' e rivolta verso l'alto

da -1 ad 1 la concavita' e rivolta verso il basso

da 1 a $+\infty$ la concavita' e' rivolta verso l'alto

Inoltre posso dire che per $x=-1$ e per $x=1$ avremo due flessi; calcoliamo il valore dei punti di flesso:

per $x = -1$ abbiamo $y = 1/\sqrt{(2\pi)} e^{-1/2(-1)^2} = 1/\sqrt{(2\pi)} e^{-1/2}$

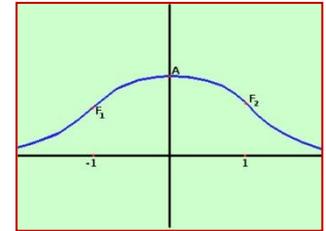
per $x = 1$ abbiamo $y = 1/\sqrt{(2\pi)} e^{-1/2(1)^2} = 1/\sqrt{(2\pi)} e^{-1/2}$

Primo punto di flesso $F_1 \equiv (-1; 1/\sqrt{(2\pi)} e^{-1/2}) \cong (-1; 0,2419)$

Secondo punto di flesso $F_2 \equiv (1; 1/\sqrt{(2\pi)} e^{-1/2}) \cong (1; 0,2419)$

Ci accontentiamo dei punti di flesso senza fare ulteriori calcoli (complicati) per individuare le equazioni delle tangenti di flesso

A destra il grafico della nostra funzione, per rappresentarla meglio l'unita' di misura sulle y e' diversa da quella sulle x Siccome nella forma richiama una campana e' chiamata anche "Curva a campana di Gauss".



Applicazioni pratiche della variabile gaussiana

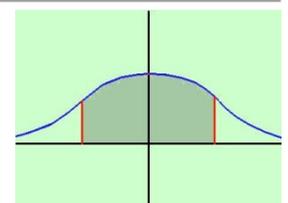
Partiamo da un semplice esempio: supponiamo che io debba trovare la misura della lunghezza di una parete di una stanza con la precisione di un millimetro; mi procuro un doppio decimetro e comincio a misurare: trovo che le misure che ottengo mi danno risultati fra loro leggermente diversi.

Secondo la teoria degli errori, scartando gli errori sistematici, cioe' quelli dovuti agli strumenti di misurazione o ad un modo errato di misurare, avro' che in ogni misura esiste un errore casuale che mi fornira' una misura piu' o meno grande della misura che cerco: se ora metto queste misure su un grafico e ripetendo il procedimento moltissime volte ottengo come rappresentazione proprio una curva a campana di Gauss e la misura migliore della parete sara' data dal vertice della campana. Intendiamoci: intuitivamente la misura centrale sara' solamente la misura che ha la piu' alta probabilita' di essere esatta, mentre per avere la probabilita' che la misura sia contenuta in un certo intervallo bastera' considerare l'area limitata dalla gaussiana, dall'asse delle x e dalle verticali mandate dai punti estremi dell'intervallo considerato.

Come esempio considerate che l'area compresa fra le verticali passanti per i punti di flesso corrisponde a circa il 70% di probabilita' che la misura sia compresa in quell'intervallo (con piu' precisione circa il 68,27%).

Cioe' la curva a campana di Gauss descrive il modo in cui gli errori casuali si distribuiscono quando facciamo una qualunque misura

Siccome in quasi tutte le scienze il concetto di misura e' centrale (pensa alla statistica, alla fisica,...) abbiamo l'importanza che assume la curva a campana di Gauss.



Vista l'importanza della variabile casuale Gaussiana essa viene spesso indicata come **variabile casuale normale**.